

## 1. Pracovné úlohy

1. S použitím zelenej čiary ortuti okalkubrujte pákový prevod Michelsonovho interferometru. Merajte od polohy mikrometru 15 mm smerom k vyšším hodnotám.
2. Michelsonovým interferometrom zmerajte vlnovú dĺžku He–Ne laseru.
3. Fabryho – Perotovým interferometrom zmerajte vzdialenosť spektrálnych čiar sodíkového dubletu.
4. Všetky merania vykonajte metódou postupných meraní a spracujte lineárnou regresiou. Stanovte chybu vlnových dĺžok získaných lineárnou regresiou.

## 2. Teoretický úvod

### 2.1. Michelsonov interferometer

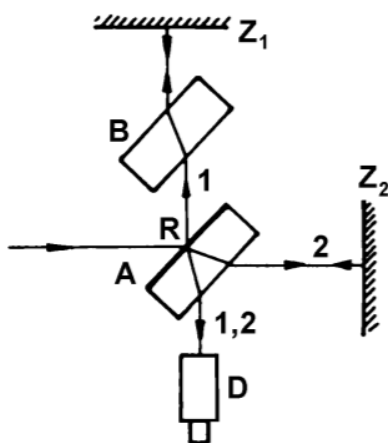
K meraniu vlnových dĺžok svetla ortuťovej výbojky a hélíum-neónového laseru použijeme Michelsonov interferometer, ktorého schéma je na Obr. 1. Svetlo zo zdroja dopadá v bode R pod uhlom  $45^\circ$  na stenu polopriepustnej planoparalelnej doštičky A, kde sa delí na lúč odrazený (1) a prechádzajúci (2). Vrstva doštičky je slabo pokovovaná tak, aby mali oba lúče približne rovnakú intenzitu. Lúč (2) sa odráža na zrkadle  $Z_2$ , a postupuje späť do doštičky, kde sa odráža o stenu A a vstupuje do ďalekohľadu. Lúč (1) sa odráža od zrkadla  $Z_1$ , postupuje späť do deliacej doštičky a vstupuje do ďalekohľadu. Aby lúče (1) a (2) prešli rovnakú optickú dráhu, je do cesty lúča (1) kladená ďalšia planoparalelná doštička B, rovnobežná s doštičkou A. V bode R sa po odraze lúče (1) a (2) stretnú a interferujú. Výsledné prerozdelenie intenzity  $I$ , ktoré pozorujeme v ďalekohľade má tvar

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \right) \quad (1)$$

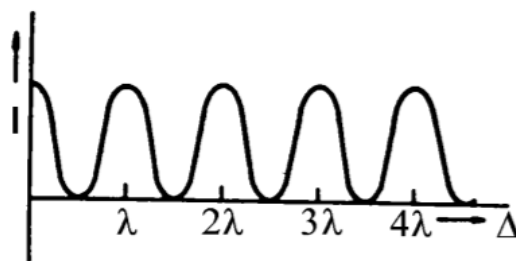
Kde  $I_0$  je amplitúda,  $\Delta$  je dráhový rozdiel lúčov,  $\lambda$  je vlnová dĺžka svetla zdroja. Ak sú optické vzdialenosti lúčov od bodu R rovnaké, je dráhový rozdiel  $\Delta = 0$ , pozorujeme maximum intenzity. Ak fixujeme zrkadlo  $Z_2$  a pohybuje šróbom mikrometru upevneným k zrkadlu  $Z_1$ , meníme polohu  $Z_1$  o  $l$  a dráhový rozdiel lúčov, pre ktorý platí

$$\Delta = 2l \quad (2)$$

Interferenčné maximá pozorujeme pre dráhový rozdiel  $\Delta = m\lambda$  kde  $m$  je celé číslo a minimá pre  $\Delta = (2m + 1)\lambda$ .



Obr. 1 Michelsonov interferometer [1]



Obr. 2 Interferenčný obrazec v Michelsonovom interferometre [1]

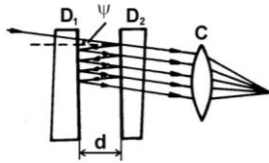
Výsledný obrazec, ktorý pri použití monochromatického zdroja pozorujeme ďalekohľadom odpovedá prúžkom rovnakej hrúbky – rovnobežné pruhy maxim, pričom dvom susedným maximám odpovedá dráhový posuv o

jednu vlnovú dĺžku  $\lambda$ . To znamená, že z posuvu zrkadla  $Z_1$   $l$  odpovedajúci posuvu obrazca o  $m$  maxim môžeme určiť vlnovú dĺžku použitého monochromatického svetla ako

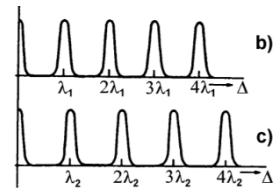
$$\lambda = \frac{2}{m} l \quad (3)$$

## 2.2. Fabry-Perotov interferometer

Usporiadanie Fabry-Perotovho interferometru je na Obr. 3. Skladá sa z dvoch rovnobežne umiestnených dosiek  $D_1, D_2$ , ktorých vnútorné vrstvy sú opatrené polopriepustným odrazivým pokrytím. Vonkajšie vrstvy zvierajú malý uhol, aby nedochádzalo k nežiadúcej interferencii s vnútornými vrstvami. Vzďialenosť  $d$  je nastaviteľná mikrometrickým posunom.



Obr. 3 Usporiadanie Fabry-Perotovho interferometru



Obr. 4 Interferenčný obrazec vo Fabry-Perotovom interferometre [1]

Do interferometru vstupujú lúče po uhlom  $\psi$ . Dochádza k mnohonásobným odrazom a obrazec pozorovaný v prechádzajúcom svetle odpovedá interferencii na planoparalelnej vrstve, ktorý je popísaný Airyho funkciou. Ostré maximá pozorujeme opäť pre dráhový rozdiel rovný celočíselnému násobku vlnovej dĺžky

$$\Delta = 2d \cos \psi = k \lambda \quad (4)$$

Kde celé číslo  $k$  je rád interferencie.

Ak sú pozorované 2 blízke vlnové dĺžky  $\lambda_1, \lambda_2$ , každej z nich prísluší vlastná sústava interferenčných krúžkov, pričom obe sústavy interferenčných krúžkov sú odlišiteľné (Obr. 4.). Interferenčné maximá v  $k$ -tom ráde sú vzdialené o  $k(\lambda_2 - \lambda_1)$ . Ak je táto vzdialenosť rovná plnej šírke v polovici maxima  $\Delta \lambda \sim \frac{\lambda}{n}$ , kde  $n$  je počet interferujúcich zväzkov,

Posúvaním dosiek, je možné nájsť takú polohu pre dráhový rozdiel  $\Delta_1$ , že maximum  $k$ -tého rádu čiary  $\lambda_1$  sa prekryje s  $(k - 1)$ -ým rádom čiary  $\lambda_2$ . Potom

$$\Delta_1 = k \lambda_1 = (k - 1) \lambda_2 \quad (5)$$

Ak stanovíme vzdialenosť  $l$  medzi dvoma susednými polohami, kde nastane prekryvanie krúžkov, môžeme určiť dráhový rozdiel ako

$$l = \frac{\Delta}{2} \quad (6)$$

A kombináciou (5) a (6) môžeme určiť

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2l} = \frac{\lambda_1^2}{2l} \quad (7)$$

### 3. Výsledky merania

#### 3.1. Kalibrácia Michelsonovho interferometru. Meranie vlnovej dĺžky hélum-neónového laseru.

Pri meraní Michelsonovým interferometrom otáčanie mikrometrického šróbu neodpovedá skutočnému posuvu zrkadla. Preto je potrebné vzťah (3) upraviť prefaktorom prevodu  $p$ , ktorý sa však môže v rôznych častiach stupnice líšiť:

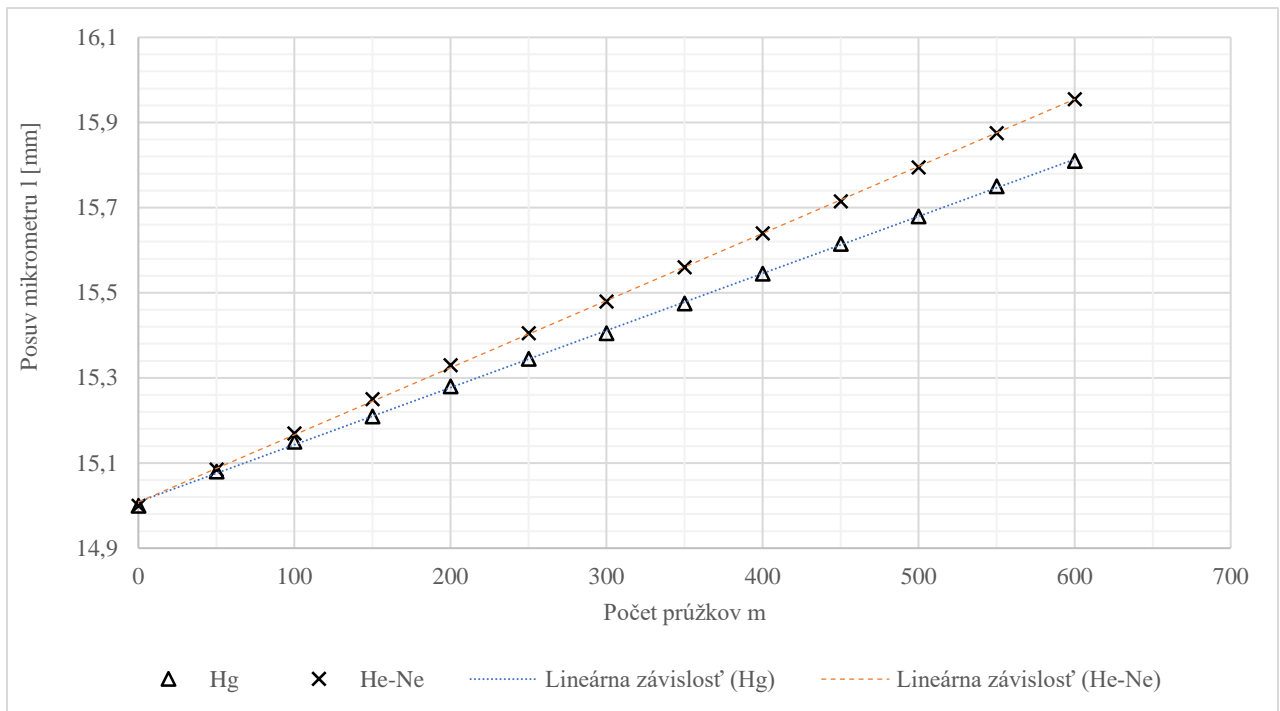
$$\frac{\lambda}{2p} m = l \quad (3')$$

Vzťah (3') je uvedený priamo v tvare, odkiaľ postupným odpočítavaním počtu prúžkov  $m$  (po 50) a posuvu na mikrometrickom šróbe  $l$ , určíme regresný koeficient  $\frac{\lambda}{2p}$  a z tabelovanej hodnoty pre vlnovú dĺžku zelenej čiary ortuťovej výbojky určíme kalibračný koeficient  $p$ .

**Tabuľka 1.** Meranie Michelsonovým interferometrom

Počet prúžkov $m$	Posuv mikrometru $l$ [mm]	
	Hg	He-Ne
0	15,000	15,000
50	15,080	15,085
100	15,150	15,170
150	15,210	15,250
200	15,280	15,330
250	15,345	15,405
300	15,405	15,480
350	15,475	15,560
400	15,545	15,640
450	15,615	15,715
500	15,680	15,795
550	15,750	15,875
600	15,810	15,955

Posuv mikrometru  $l$  je udaný s chybou  $\sigma_l = 0,005\text{mm}$ , tj. Polovica najmenšieho dieliky stupnice. Hodnoty sú uvedené až na 3 desatinné miesta, pretože niektoré ležali uprostred medzi dvoma dielikmi mikrometra a sú teda dané ako ich aritmetický priemer.



**Graf 1.** Závislosť pootočenia mikrometrického šróbu  $l$  na počte interferenčných prúžkov  $m$

Použitím programu Ms Excel dostávame smernice závislosti

$$s_{Hg} = (1341 \pm 7)nm$$

$$s_{He-Ne} = (1577 \pm 5)nm$$

Porovnaním  $s_{Hg}$  so vzťahom (3')  $s_{Hg} = \frac{\lambda_{Hg}}{2p}$  a dosadením za vlnovú dĺžku zelenej čiary ortuť  $\lambda_{Hg,tab} = 546,1 nm$  [2] získame kalibračný faktor

$$p = (0,204 \pm 0,001)$$

kde chyba je vypočítaná ako

$$\sigma_p = p \frac{\sigma_{s_{Hg}}}{s_{Hg}} \quad (8)$$

Dosadením už známych hodnôt  $s_{He-Ne}$  a  $p$  do (3') vypočítame vlnovú dĺžku hélíum-neónového laseru

$$\lambda_{He-Ne} = (642 \pm 4)nm$$

Pre porovnanie, tabuľková hodnota uvádzaná v [3] je  $\lambda_{He-Ne,tab} = 632,8nm$ .

### 3.2. Meranie vzdialenosti spektrálnych čiar sodíkového dubletu

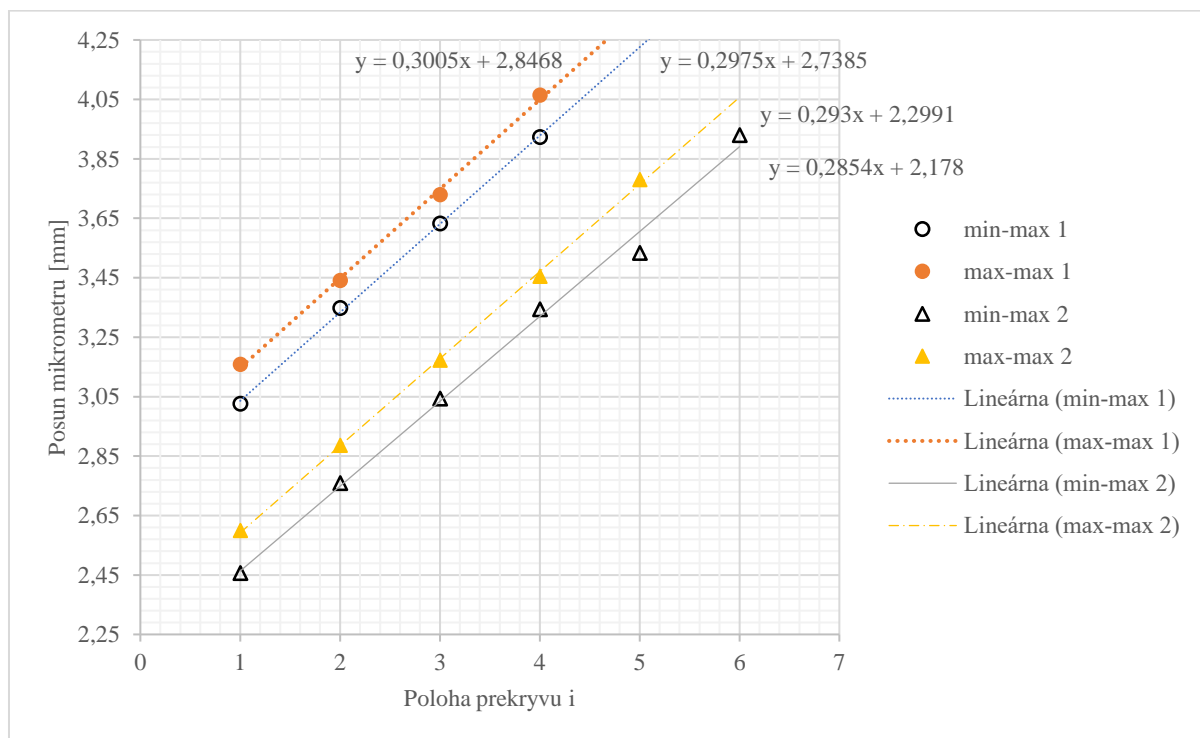
Pri meraní Fabry-Perotovým interferometrom sme posúvali šróbom a sledovali, polohy, v ktorých sa čiary  $\lambda_1, \lambda_2$  prekrývali ako aj polohy, v ktorých čiary  $\lambda_1$  ležali uprostred čiar  $\lambda_2$ . V prípade prekrytia maxim je meranie značne nepresné, pretože interval vzdialeností, pre ktorý sú čiary navzájom nerozlišiteľné je relatívne široký. Presnejšie meranie sa dá získať v prípade prekrytia maxim s minimami. Meranie sme z podozrenia veľkej nepresnosti zopakovali ešte raz, po spracovaní ale dostávame obdobné koeficienty lineárnej regresie.

**Tabuľka 2.** Polohy prekrytia miním a maxím, resp. dvoch maxím pre dve vlnové dĺžky sodíkového dubletu

Poloha i	Posun $l$ [mm]			
	Meranie 1.		Meranie 2.	
	min-max 1	max-max 1	min-max 2	max-max 2
1	3,03	3,16	2,46	2,60
2	3,35	3,44	2,76	2,89
3	3,63	3,73	3,04	3,17
4	3,92	4,06	3,34	3,45
5			3,53	3,78
6			3,93	

Aj napriek dobrej presnosti stupnice Fabry-Perotovho interferometru, ktorá nám umožňuje namerať hodnoty posuvu na  $0,1 \mu\text{m}$ , pri tomto meraní značnú chybu vnáša ľudský faktor a vôbec citlivosť ľudského oka. Jednak rozpätie, s ktorým u sodíkového dubletu určíme prekryv dvoch maxím je odhadované na  $2\sigma_{l_{\text{max-max}}} = 0,04 \text{ mm}$  (Lineárna závislosť v grafe 2. je získaná díky tomu, že meranie prebehlo za rovnakých podmienok – že hodnota bola odčítaná akonáhle už 2 spektrálne čiary neboli rozlíšiteľné, skutočná hodnota, pre ktorú sa krúžky kryjú v maximách je pravdepodobne vyššia). Rozpätie v ktorom určíme hodnotu prekryvu minima s maximom je, ako plynie z opakovaného merania,  $2\sigma_{l_{\text{min-max}}} = 0,02 \text{ mm}$ .

Vzhľadom na dobrú linearitu všetkých štyroch závislostí, použijeme všetky 4 pre spracovanie lineárnou regresiou.



**Graf 2.** Závislosť posunu mikrometru  $l$  na  $i$ -tej polohe prekryvu

V spracovaní z dôvodu veľkej odchýlky od regresnej krivky, neuvažujeme hodnotu posuvu pre prekryv min-max v 2. meraní, piata hodnota.

**Tabuľka 3.** Spracovanie regresných koeficientov

Smernica $s[mm^{-1}]$	Rozdiel vlnových dĺžok $\lambda_2 - \lambda_1[nm]$
$0,30 \pm 0,01$	$0,58 \pm 0,01$
$0,30 \pm 0,01$	$0,58 \pm 0,02$
$0,294 \pm 0,001$	$0,590 \pm 0,002$
$0,293 \pm 0,004$	$0,593 \pm 0,009$

Smernice, ako aj ich chyby sú určené pomocou programu MS Excel. Pre chybu dopočítaného rozdielu vlnových dĺžok podľa (7) platí

$$\sigma_{\lambda_2 - \lambda_1} = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\sigma_s}{s} \quad (9)$$

Z priemeru získaných hodnôt máme  $\lambda_2 - \lambda_1 = (0,59 \pm 0,01)nm$

Pre porovnanie v [4] je uvádzaná hodnota  $(\lambda_2 - \lambda_1)_{tab} = 0,596 nm$

## 4. Diskusia

V meraní interferometrami, aj napriek dobrej presnosti prístrojov a jemnej kontrole nad posuvmi optických častí, pomerne veľkú chybu vnáša ľudský faktor. Meranie Michelsonovým interferometrom prebieha posúvaním mikrometrického šróbu a súčasným odpočítavaním istého počtu, v našom prípade 50, interferenčných prúžkov. Je potreba počas celého merania udržať pozornosť – v dvoch meraniach 10-krát bezchybne napočítať do 50, a zároveň otáčať šróbom dostatočne jemne, aby sme stihli odpočítavať a aby nedošlo k skoku, kedy sa interferenčný obrazec posunie o náhodné číslo prúžkov, ktoré nie je možné nijakým spôsobom určiť. Jedine z nameraných dát je možné priebežne kontrolovať, že nedochádza k veľmi závažnej chybe, ibaže by sme sa systematicky dopúšťali rovnakej chyby pri každom meraní. So zvyšujúcim sa číslom merania prichádza aj únava oka a náročnejšie sledovanie interferenčných prúžkov.

Najprv sme premerali závislosť posunu mikrometra na počte prešlých maxim pre ortuťovú výbojku, kde pomocou zeleného filtra získali monochromatické svetlo vlnovej dĺžky  $\lambda_{Hg,tab} = 546,1 nm$ . Tejto vlnovej dĺžke odpovedala smernica regresie  $s_{Hg} = (1341 \pm 7)nm$  a odiaľ sme dostali, pre pákový prevod Michelsonovho interferometru hodnotu  $p = (0,204 \pm 0,001)$  tj. 1:(4,91±0,03). S použitím takto získaného kalibračného koeficientu  $p$  sme vypočítali vlnovú dĺžku helium-neónového lasera  $\lambda_{He-Ne} = (642 \pm 4)nm$ , čo je v nezhode s tabuľkovou hodnotou [3] (Viz. Výsledky merania). Naopak, ak by sme kalibrovali pákový prevod na základe vlnovej dĺžky lasera, by sme pracovali s kalibračným koeficientom okolo  $p' = 0,20065$ , tj. 1:4,98., kde obdobne ako sme postupovali v časti 3.1. dostávame pre ortuť  $\lambda'_{Hg} = (538 \pm 1) nm$ . Táto nezhoda medzi výsledkami je zrejme spôsobená tým, že kalibračný koeficient  $p$  má rôzne hodnoty pre rôzne polohy na stupnici.

Pri premeriavaní jemnej štruktúry čiar sodíkového dubletu Fabry-Perotovým interferometrom vzniká chyba pri určovaní meraných polôh prekrivov. Presnosť nášho merania je značne ( o dva rády) horšia než je presnosť stupnice, ktorej najmenší dielik odpovedá 100nm. Prípad, kedy odčítame prekryv dvoch maxim sa dá vylepšiť tým, že hodnotu odpíšeme ihneď ako už nerozlíšime 2 čiary v interferenčnom obraze. Podľa grafu 2., do ktorého sú vynášané práve hodnoty merané takýmto spôsobom, to zrejme na linearite nič nepokazí. Chybu je možné minimalizovať spracovaním metódou lineárnej regresie. Z aritmetického priemeru výsledkov získaných z 4 nezávislých lineárnych závislostí, máme  $\lambda_2 - \lambda_1 = (0,59 \pm 0,01)nm$ , čo je v rámci chyby v zhode s tabuľkovou hodnotou [4] (viz. Výsledky merania)

## 5. Záver

1. S použitím zelenej čiary ortuti sme okalibrovali pákový prevod Michelsonovho interferometru, získaný kalibračný koeficient je  $p = (0,204 \pm 0,001)$

2. Michelsonovým interferometrom bola pre vlnovú dĺžku Hélium-Neónového laseru získaná hodnota u  $\lambda_{He-Ne} = (642 \pm 4)nm$

3. Fabryho – Perotovým interferometrom bola pre vzdialenosť spektrálnych čiar sodíkového dubletu nameraná hodnota  $\lambda_2 - \lambda_1 = (0,59 \pm 0,01)nm$

## 6. Použitá literatúra

[1] Pokyny k meraniu [https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/pokyny/mereni\\_308.pdf](https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/pokyny/mereni_308.pdf) (10.3.2019)

[2] <http://people.uncw.edu/olszewski/labsummer2/laboratory/mercury.pdf> (10.3.2019)

[3] <https://ehs.princeton.edu/book/export/html/348> (10.3.2019)

[4] J. Mikulčák a kolektiv: Matemaické, fyzikální a chemické tabulky pro SŠ; Prometheus, 1988