

## 1 Pracovní úkoly

1. Změřte závislost prodloužení tyče na teplotě. Měření proveďte pro čtyři různé materiály.
2. Výsledky měření zpracujte metodou lineární regrese a graficky znázorněte.
3. Určete koeficient teplotní roztažnosti měřených materiálů.

## 2 Teoretická část

Pevná tělesa obecně s rostoucí teplotou mění svůj objem. Pro tělesa, u kterých převládá jeden rozměr se zavádí délková roztažnost, která je charakterizovaná součinitelem délkové roztažnosti  $\alpha$  [1]

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \left( \frac{\partial l}{\partial t} \right)_p \quad (1)$$

kde  $l_0$  počáteční délku tělesa a index  $p$  znamená, že derivujeme za konstantního tlaku.

My budeme pozorovat délkovou roztažnost dutých tyčí, kterými bude protékat voda, jejíž teplotu budeme postupně zvyšovat. Měření začneme při teplotě tyče  $t_0$ . Za této teploty bude mít tyč délku  $l_0$ .

Pokud se nepohybujeme v příliš velkém teplotním intervalu, tak lze součinitel teplotní roztažnosti  $\alpha$  považovat za konstantní a pro prodloužení tyče  $\Delta l = l - l_0$  poté bude platit

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t \quad (2)$$

kde  $\Delta t = t - t_0$  a  $l$  značí délku tyče za teploty  $t$ .

Naměříme tedy hodnoty  $\Delta l$  a  $\Delta t$  a proložíme jimi přímkou ve tvaru  $\Delta l = A \Delta t$ . Teplotní součinitel délkové roztažnosti poté můžeme vypočítat podle vztahu

$$\alpha = \frac{A}{l_0} \quad (3)$$

## 3 Výsledky měření

Měření bylo provedeno při okolní teplotě  $26,1^\circ\text{C}$ , tlaku  $986,5 \text{ hPa}$  a relativní vlhkosti vzduchu  $28,6\%$ . Tyto veličiny se v průběhu měření pravděpodobně měnily, předpokládám však, že případná změna jejich hodnot nebyla dostatečně velká, aby ovlivnila měření.

Tyče byly obklopeny izolací, takže jejich teplota byla určena především proudící tekutinou a vliv okolní teploty tak byl aspoň částečně omezen.

V definici součinitele délkové roztažnosti (1) se počítá s konstantním tlakem. Předpokládám, že tento předpoklad byl splněn v rámci přesnosti měření.

Nejdříve jsem metrem s přesností  $1 \text{ mm}$  změřil počáteční délku všech tyčí. Délku jsem měřil za pokojové teploty, správně bych ji však měl změřit za počáteční teploty, tedy kolem  $21^\circ\text{C}$ . Změna délky tyče mezi teplotou  $21^\circ$  a teplotou okolí bude však menší, než je přesnost měření, takže tato nepřesnost by se neměla ve výsledku projevit. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 1. U všech tyčí mi vyšla stejná počáteční délka a to  $l_0 = (600 \pm 1) \text{ mm}$ .

Tabulka 1: Naměřené počáteční délky tyčí

Ocel	Hliník	Mosaz	Měď	Sklo
$(600 \pm 1) \text{ mm}$	$(600 \pm 1) \text{ mm}$	$(600 \pm 1) \text{ mm}$	$(600 \pm 1) \text{ mm}$	$(600 \pm 1) \text{ mm}$

Tyče jsem poté propojil s termostatem Haake pomocí trubic. Jeden konec tyče jsem pevně uchytil pomocí šroubku a ke druhému konci přiložil úchylkoměr. Po zapnutí termostatu pak trubicemi začala proudit voda. Pro jednotlivé teploty jsem poté odečítal příslušná prodloužení tyče.

Příslušnou teplotu jsem měřil kapalinovým teploměrem, který byl ponořen ve vodě blízko termostatu. Neměřil jsem tak přímo teplotu tyče, ale teplotu vody, která do tyče vtékala. Naměřené hodnoty ukazuje tabulka 2.

Nejmenší dílek na stupnici kapalinového teploměru byl  $1\text{ }^\circ\text{C}$ , odhaduji tak přesnost měření teploty na  $\sigma_t = 0,5\text{ }^\circ\text{C}$ . Obdobně nejmenší dílek na úchylkoměru byl  $0,01\text{ mm}$ , takže přesnost měření prodloužení byla  $\sigma_{\Delta l} = 0,005\text{ mm}$ .

Table 2: Naměřené prodloužení tyčí v závislosti na teplotě

Ocel		Hliník		Mosaz		Měď		Sklo	
$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\Delta l}{\text{mm}}$	$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\Delta l}{\text{mm}}$	$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\Delta l}{\text{mm}}$	$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\Delta l}{\text{mm}}$	$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\Delta l}{\text{mm}}$
21,5	0,000	21,0	0,000	21,0	0,000	21,0	0,000	21,0	0,000
24,0	0,015	24,0	0,050	24,5	0,040	24,0	0,030	24,5	0,005
28,0	0,055	28,0	0,105	28,5	0,080	28,0	0,070	28,0	0,005
32,0	0,070	32,0	0,155	32,0	0,120	32,0	0,105	32,0	0,010
36,0	0,100	36,0	0,205	36,0	0,170	36,0	0,150	36,5	0,020
40,0	0,130	40,0	0,260	40,0	0,210	40,0	0,185	40,5	0,025
44,0	0,160	44,0	0,310	44,0	0,255	44,0	0,225	44,0	0,030
48,0	0,190	48,5	0,365	48,5	0,300	48,0	0,260	48,0	0,040
52,0	0,215	52,0	0,410	52,0	0,345	52,0	0,300	52,5	0,045
56,0	0,240	56,5	0,460	56,5	0,385	56,5	0,340	56,0	0,050
60,0	0,270	60,0	0,510	60,0	0,425	60,0	0,370	60,0	0,055

Počáteční teplotu pro každé měření označím  $t_0$  a přiřadím jí prodloužení tyče  $\Delta l = 0$ . Pro  $\Delta t = t - t_0$  poté platí vztah (2).

Naměřenými hodnotami proložím přímkou ve tvaru  $\Delta l = A\Delta t$  za pomoci lineární regrese. Pro parametr lineární regrese  $A$  platí [2]

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta l_i \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i^2} \quad (4)$$

a pro směrodatnou odchylku tohoto parametru platí

$$\sigma_A = \frac{\sigma_{\Delta l}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta t_i^2}} \quad (5)$$

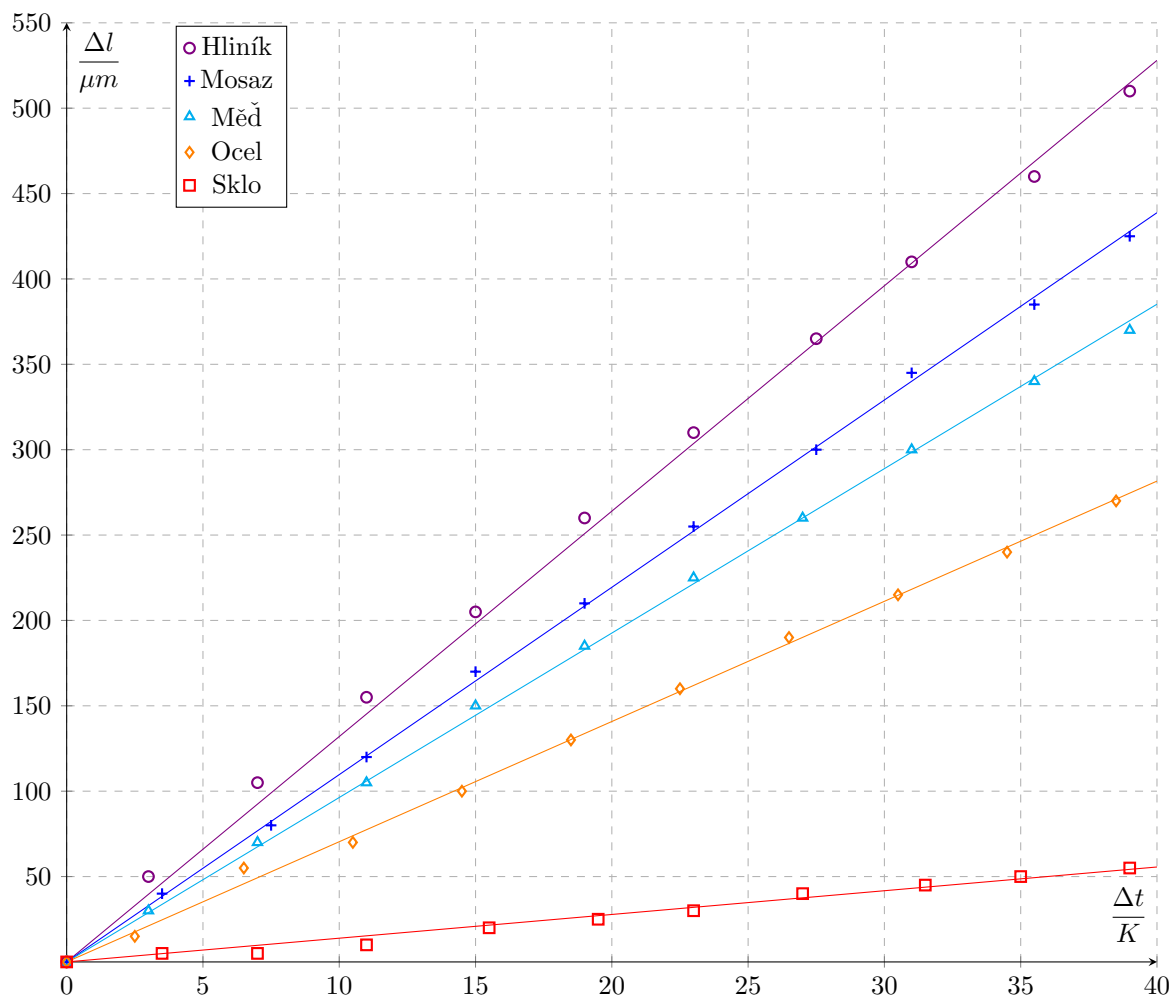
Z parametru lineární regrese a počáteční délky tyčí pak můžu podle (3) vypočítat příslušné součinitele délkové roztažnosti a chybu výsledku určit ze zákona šíření chyb jako

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\left(\frac{1}{l_0}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{A}{l_0^2}\right)^2 \sigma_{l_0}^2} \quad (6)$$

Takto vypočítané hodnoty parametru lineární regrese a součinitelů teplotní roztažnosti ukazuje tabulka 3. Naměřené hodnoty proložené určenými přímkami ukazuje graf 1.

Tabulka 3: Vypočítané parametry lineární regrese a součinitele teplotní roztažnosti

	$A$ $10^{-6} m \cdot K^{-1}$	$\alpha$ $10^{-6} K^{-1}$
Ocel	$7,04 \pm 0,05$	$11,7 \pm 0,1$
Hliník	$13,2 \pm 0,1$	$22,1 \pm 0,2$
Mosaz	$10,97 \pm 0,06$	$18,3 \pm 0,1$
Měď	$9,63 \pm 0,07$	$16,0 \pm 0,1$
Sklo	$1,39 \pm 0,07$	$2,3 \pm 0,1$



Graf 1: Grafické zpracování závislosti prodloužení tyčí na teplotě

## 4 Diskuse

Jak jsem se již zmínil, tak jsem počáteční délky tyčí měřil za pokojové teploty. Rozdíl mezi pokojovou teplotou a počáteční teplotou měření je však pouze  $5^{\circ}\text{C}$  a při tomto rozdílu teplot nebude prodloužení žádné z tyčí větší než  $0,1\text{ mm}$  (nejvíce se protáhne hliník a to řádově o  $0,05\text{ mm}$ ). Jelikož je přesnost měření počátečních délek rovna  $1\text{ mm}$  tak se toto přiblížení ve výsledku neprojeví.

Dále bylo použito přiblížení při měření teploty a to, že jsme měřili teplotu vodní lázně kolem termostatu a ne přímo teplotu tyčí. I přestože tyče byly částečně izolované od okolí, mohlo se stát, že teplota tyčí byla menší než teplota vodní lázně. Mohlo docházet ke ztrátám energie při proudění vody, trubice totiž izolované od okolí nebyly. A také je možné že se tyče nestihly ohřát přesně na teplotu vody, ale pouze na teplotu o něco nižší. Předpokládám však, že tento rozdíl nebude značný a v rámci přesnosti měření neovlivní výrazně výsledky.

Při zpracování výsledků bylo užito vzorců pro lineární regresi pro výpočet parametru  $A$  a jeho chyby. Jedním ze základních předpokladů pro tyto vzorce však je, že chyba měření veličiny na ose  $x$  je zanedbatelně malá. Ovšem chyba měření teploty je  $\sigma_t = 0,5^{\circ}\text{C}$ , takže tento předpoklad je splněn pouze přibližně. To především znamená že směrodatná odchylka parametru  $A$  bude o něco větší než hodnota vypočítaná podle (5).

Tabulkované hodnoty součinitelů teplotní roztažnosti měřených materiálů ukazuje tabulka 4 [3]

Tabulka 4: Tabulkované hodnoty součinitelů teplotní roztažnosti

	$\alpha$ $10^{-6}\text{ K}^{-1}$
Ocel	11 – 12,5
Hliník	21 – 24
Mosaz	18 – 19
Měď	16 – 16,7
Sklo	4 – 9

Rozmezí těchto hodnot je poměrně velké, což je způsobeno tím, že neznáme přesné složení materiálů použitých tyčí (předpokládám, že i hliníková tyč nemusí být čistě z hliníku). Hodnoty již pro konkrétní materiály uvádí např. [4] nebo [5] a většinou spadají do rozmezí hodnot udávaných [3]. Ovšem existují např. i druhy ocelí, pro které je udávaná hodnota mimo uvedené rozmezí, např.  $\alpha = 17,3 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ . Obdobně existují extrémy i pro ostatní materiály v závislosti na jejich přesném složení. Pro sklo mají hodnoty koeficientu  $\alpha$  v uvedených zdrojích největší rozptyl.

Vzhledem k tomu, že neznám přesné složení materiálů měřených tyčí, nemůžu naměřené hodnoty přesně porovnat s tabulkovanými hodnotami. Mohu pouze tvrdit, že pro ocel, hliník, mosaz a měď spadají naměřené hodnoty  $\alpha$  do rozmezí tabulkovaných hodnot běžných materiálů. Pro sklo jsem naměřil poměrně malou hodnotu  $\alpha$  v porovnání s hodnotami uvedených ve zdrojích [3], [4] a [5], takže se mohlo jednat o nějaké méně běžné složení skla.

## 5 Závěr

Byla naměřena závislost prodloužení tyče na teplotě pro pět různých materiálů. Z naměřených hodnot byly určeny součinitele délkové roztažnosti, které shrnuje tabulka 5.

Tabulka 5: Výsledné součinitele délkové roztažnosti

	Součinitel délkové roztažnosti
Ocel	$(11,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Hliník	$(22,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Mosaz	$(18,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Měď	$(16,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Sklo	$(2,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} K^{-1}$

## 6 Seznam použité literatury

- [1] Teplotní roztažnost pevných látek. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-04-28]. [http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_124.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_124.pdf)
- [2] English, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.
- [3] Coefficients of Linear Thermal Expansion [online]. [cit. 2018-04-28]. [https://www.engineeringtoolbox.com/linear-expansion-coefficients-d\\_95.html](https://www.engineeringtoolbox.com/linear-expansion-coefficients-d_95.html)
- [4] Material Expansion Coefficients [online]. [cit. 2018-04-28]. [https://psec.uchicago.edu/thermal\\_coefficients/cte\\_metals\\_05517-90143.pdf](https://psec.uchicago.edu/thermal_coefficients/cte_metals_05517-90143.pdf)
- [5] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch. Fyzikální a matematické tabulky SNTL, Praha 1980