Pracovní úkol

1. Změřte tuhost k pěti pružin metodou
   a. statickou
   b. dynamickou
2. Z měření doby kmitů T tělesa hmotnosti m zavěšeného na pružině určete závislost úhlové frekvence na $\sqrt{k/m}$.
3. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g
4. Sestrojte grafy závislostí:
   a. $\omega = f(\sqrt{k/m})$
   b. $\omega = f(\sqrt{k})$
   c. $\omega = f(\sqrt{1/m})$

Teoretická část

Harmonický knit je lineární kmitavý pohyb, který vzniká působním síly F uměrné okamžité výchylce y tělesa z rovnovážné polohy a má opačný směr

$$F = -ky, \tag{1}$$

kde k je konstanta úměrnosti, kterou nazveme tuhost pružiny. Okamžitá výchylka z rovnovážné polohy v závislosti na čase t je

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

kde ω je úhlová frekvence související s dobou kmitu podle vztahu

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{3}$$

Závaží o hmotnosti m kmitající svisle v tíhovém poli zavěšené na šroubové pružině je harmonický oscilátor.

Zavěsíme-li na pružinu závaží o hmotnosti m, prodlouží se o délku

$$y_0 = \frac{mg}{k}. \tag{4}$$

Vztahu (4) užívá statická metoda určení tuhosti pružiny.

Vychýlíme-li těleso zavěšené na pružině z rovnovážné polohy, bude vykonávat harmonické kmity s frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5}$$

Tímto postupem určuje tuhost pružiny dynamická metoda.

Z doby kmitu tělesa a výchylky při statickém zatížení pružiny lze vypočítat místní tíhové zrychlení

$$g = \omega^2 y_0. \tag{6}$$

Ve výpočtech je dále potřeba lineární regrese přímkou procházející počátkem.

$$y = ax. \tag{7}$$

Parametr a je (podle [2]) určen na základě souboru dat x_i a y_i vztahem

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{8}$$

a odchylka a je

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i)^2} \tag{9}$$

Pro výpočet tuhostí pružin jsou použity následující vztahy vyjádřené z (4) a (5)

$$k_{\text{stat}} = \frac{mg}{y_0} \tag{10}$$

$$k_{\text{dyn}} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2. \tag{11}$$

Měření

Nejprve je potřeba naměřit všechna potřebná data pro statickou a dynamickou metodu. Pokud procujeme uvážlivě, lze je použít i pro úkoly 2 až 4.

Hmotnost závaží zavěšovaného na pružinu není potřeba měřit, neboť jsou používána výhradně kalibrovaná závaží. Ve skutečnosti je hmotnost zatěžující pružinu nepatrně větší, protože závaží jsou na pružinu zavěšena pomocí nitě. Její hmotnost však zanedbáváme.

Prodloužení pružiny určíme jako rozdíl vzdálenosti konce zatížené pružiny y_2 od počátku vztažné soustavy a y_1 nezatížené pružiny. Měření těchto vzdáleností se provádí katetometrem.

Dobu kmitu závaží na pružině měříme pomocí ručně ovládaných stopek. Vzhledem k tomu, že ve většině případů je tento čas menší než jedna sekunda, měříme vždy dobu trvání deseti kmitů. Měření se provádí dvakrát, aby se vyloučila chyba nesprávným odpočítáním deseti kmitů. Ve výpočtech chápeme T jako aritmetický průměr těchto hodnot. V tabulce jsou uvedeny již skutečné periody kmitů (tj. po vydělení deseti).

Všechny naměřené hodnoty jsou tabulce 1 na levé straně. Pro každé měření jsou vypočítané některé důležité veličiny, které se využívají pro tvorbu grafů a další výpočty (pravá strana tabulky 1). Třetí měření na pružině číslo 1 považuji za hrubou chybu a není uvažováno ve výpočtech dalších veličin.

Tabulka 2 uvádí přesnosti jednotlivých měřících přístrojů. Zvláštní pozornost zasluhuje přesnost stopek. Samotný přístroj měří s přesností lepší než 0.01 s, nicméně je ovládán mou rukou, která reaguje mnohem méně přesněji. Svou reakční dobu jsem již v minulosti odhadl s použitím počítače na 0.3 s.

Měřidlo	Veličina	Odchylka
Katetometr	y_1, y_2	10^{-3} m
Stopky	$10 \cdot T_1$, $10 \cdot T_2$	0.3 s

Tabulka 2.: Přesnosti používaných měřidel

$\frac{m}{\text{kg}}$	$\frac{y_1}{\text{m}}$	$\frac{y_2}{\text{m}}$	$\frac{t_1}{\text{s}}$	$\frac{t_2}{\text{s}}$	$\frac{k_{\text{stat}}}{\text{Nm}^{-1}}$	$\frac{k_{\text{dyn}}}{\text{Nm}^{-1}}$	$\frac{g}{\text{ms}^{-2}}$	$\frac{\omega}{\text{s}^{-1}}$
Pružina 1								
0.050	0.433	0.521	0.677	0.669	5.5720	4.3581	7.6703	9.3361
0.100	0.321	0.523	0.955	0.953	4.8548	4.3377	8.7622	6.5861
0.020	0.502	0.522	0.414	0.419	9.8067	4.5516	4.5516	15.0857
0.070	0.388	0.522	0.801	0.805	5.1229	4.2857	8.2041	7.8247
0.150	0.211	0.522	1.163	1.172	4.7299	4.3445	9.0075	5.3817
Pružina 2								
0.050	0.361	0.429	0.550	0.540	7.2108	6.6456	9.0381	11.5288
0.100	0.293	0.429	0.756	0.754	7.2108	6.9257	9.4190	8.3221
0.150	0.225	0.43	0.911	0.918	7.1756	7.0808	9.6771	6.8706
0.200	0.157	0.429	1.058	1.048	7.2108	7.1209	9.6844	5.9670
0.070	0.334	0.428	0.630	0.639	7.3028	6.8643	9.2177	9.9026
Pružina 3								
0.100	0.386	0.431	0.461	0.467	21.793	18.337	8.2516	13.5413
0.150	0.361	0.431	0.560	0.559	21.014	18.917	8.8279	11.2300
0.200	0.334	0.432	0.636	0.645	20.014	19.246	9.4308	9.8098
0.300	0.285	0.431	0.791	0.783	20.151	19.122	9.3060	7.9837
0.500	0.183	0.43	1.013	1.015	19.852	19.198	9.4838	6.1964
Pružina 4								
0.050	0.397	0.475	0.566	0.573	6.2863	6.0861	9.4944	11.0328
0.100	0.321	0.475	0.795	0.792	6.3680	6.2700	9.6558	7.9183
0.150	0.244	0.476	0.967	0.962	6.3405	6.3657	9.8456	6.5144
0.200	0.167	0.476	1.120	1.107	6.3473	6.3681	9.8387	5.6427
0.300	0.017	0.475	1.343	1.341	6.4236	6.5762	10.0398	4.6820
Pružina 5								
0.150	0.434	0.467	0.366	0.374	44.576	43.256	9.5163	16.9816
0.200	0.423	0.468	0.420	0.420	43.585	44.760	10.0710	14.9600
0.300	0.402	0.468	0.510	0.515	44.576	45.091	9.9201	12.2599
0.500	0.36	0.467	0.650	0.650	45.825	46.720	9.9981	9.6664
0.700	0.319	0.467	0.758	0.763	46.383	47.781	10.1024	8.2619

Tabulka 1.: Naměřené hodnoty (před svislou čarou) a vypočítané hodnoty pro jednotlivá měření

Na základě naměřených a vypočítaných hodnot jsou sestrojeny grafy 1 až 3 požadované v zadání úlohy.

Vypočítané hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3. Pro určení tuhosti pružin byl použit regresní vztah (8) a pro výpočet odchylky vztah (9).

Závislost úhlové frekvence na $\sqrt{k/m}$ je patrná z grafu 1, kde je rovněž vynesena očekávaná závislost podle vztahu (5).

Diskuze

Výsledky měření jasně ukazují, že statická metoda je mnohem přesnější vzhledem k

Veličina	Statická metoda	Dynamická metoda
Tuhost pružiny 1	$(4.84 \pm 0.05)\,\mathrm{Nm^{-1}}$	$(4.33 \pm 0.49)\,\mathrm{Nm^{-1}}$
Tuhost pružiny 2	$(7.21 \pm 0.01)\,\mathrm{Nm^{-1}}$	$(6.8 \pm 2.1)\,\mathrm{Nm^{-1}}$
Tuhost pružiny 3	$(20.03 \pm 0.06)\,\mathrm{Nm^{-1}}$	$(18.7 \pm 2.5)\,\mathrm{Nm^{-1}}$
Tuhost pružiny 4	$(6.39 \pm 0.01)\,\mathrm{Nm^{-1}}$	$(6.2 \pm 1.4)\,\mathrm{Nm^{-1}}$
Tuhost pružiny 5	$(45.85 \pm 0.08)\,\mathrm{Nm^{-1}}$	$(44.2 \pm 5.2)\,\mathrm{Nm^{-1}}$
Místní tíhové zrychlení		$(9.4 \pm 1.1)\,\mathrm{ms^{-2}}$

Tabulka 3.: Vypočítané hodnoty

Teplota	$23.8\,^\circ\mathrm{C}$
Tlak	$980.6\,\mathrm{hPa}$
Relativní vlhkost	24.2%

Tabulka 4.: Parametry prostředí v době měření

náhodným chybám než metoda dynamická. Hodnota naměřená statickou metodou vždy leží v okolí výsledku dynamické metody určeném odchylkou tohoto měření. To ukazuje, že měření bylo úspěšné a systematická chyba je malá.

Velká nepřesnost dynamické metody je překvapivá. Zřejmě je ovlivněna nepřesností měření času díky mé dlouhé reakční době. Možnosti jejího snížení jsou jednoduché. Místo ručního ovládání stopek by bylo lepší použít zařízení, které by mělo reakční dobu menší. Vyšší přesnosti by bylo možné dosáhnout také měřením většího počtu kmitů. To by však na druhou stranu zvětšovalo riziko chyby v počítání kmitů.

V případě určení místního tíhového zrychlení sice chybí srovnání, ale skutečná hodnota by se neměla příliš lišit od běžně používané $g = 9.80665\,\mathrm{ms^{-2}}$, která opět spolehlivě leží v rozsahu odchylky.

Graf 1 dobře ukazuje, že úhlová frekvence závisí na $\sqrt{k/m}$ podle vztahu (5), kromě měření číslo 3 pružiny 1, které bylo již na počátku označeno za hrubou chybu.

Grafy 2 a 3 výborně vystihují očekávanou linearitu zkoumaných závislostí.

Závěr

Měření lze považovat za úspěšné, neboť různé metody vedly k výsledkům, které si neodporují. Jejich přesnost by však bylo dobré zvýšit způsoby navrženými v diskusi.

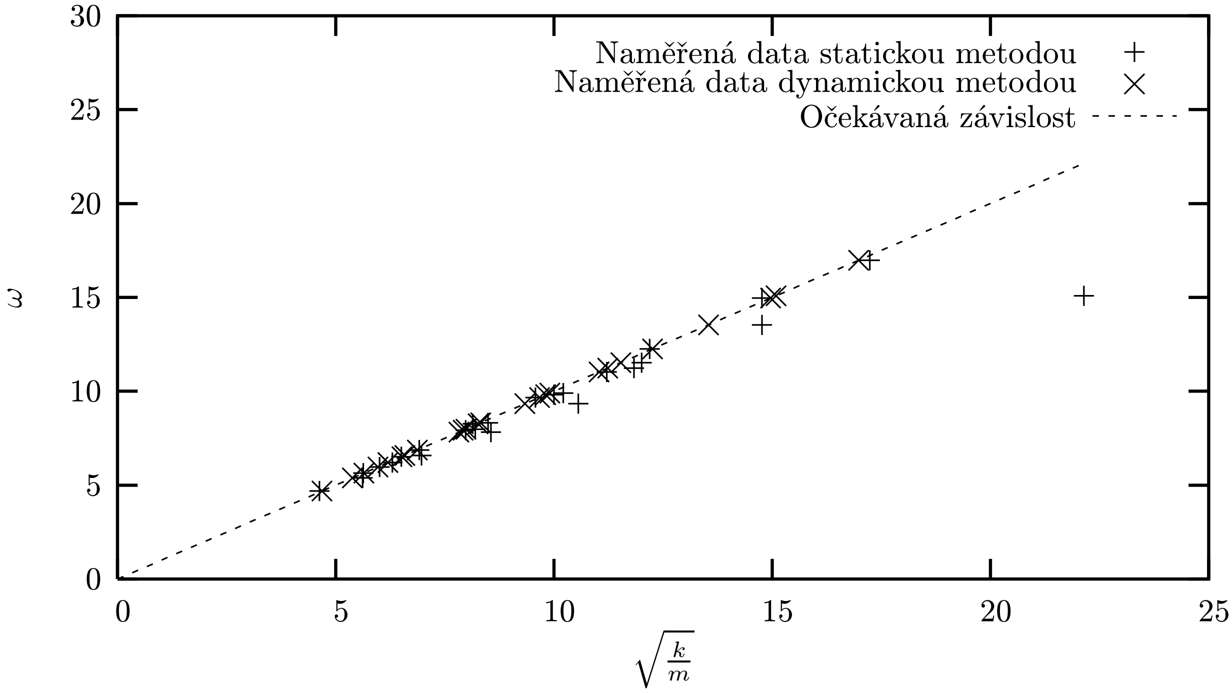
Tuhost jednotlivých pružin a místní tíhové zrychlení jsou uvedeny v tabulce 3, grafy požadovaných závislostí jsou v příloze pod čísly 1 až 3.

Literatura

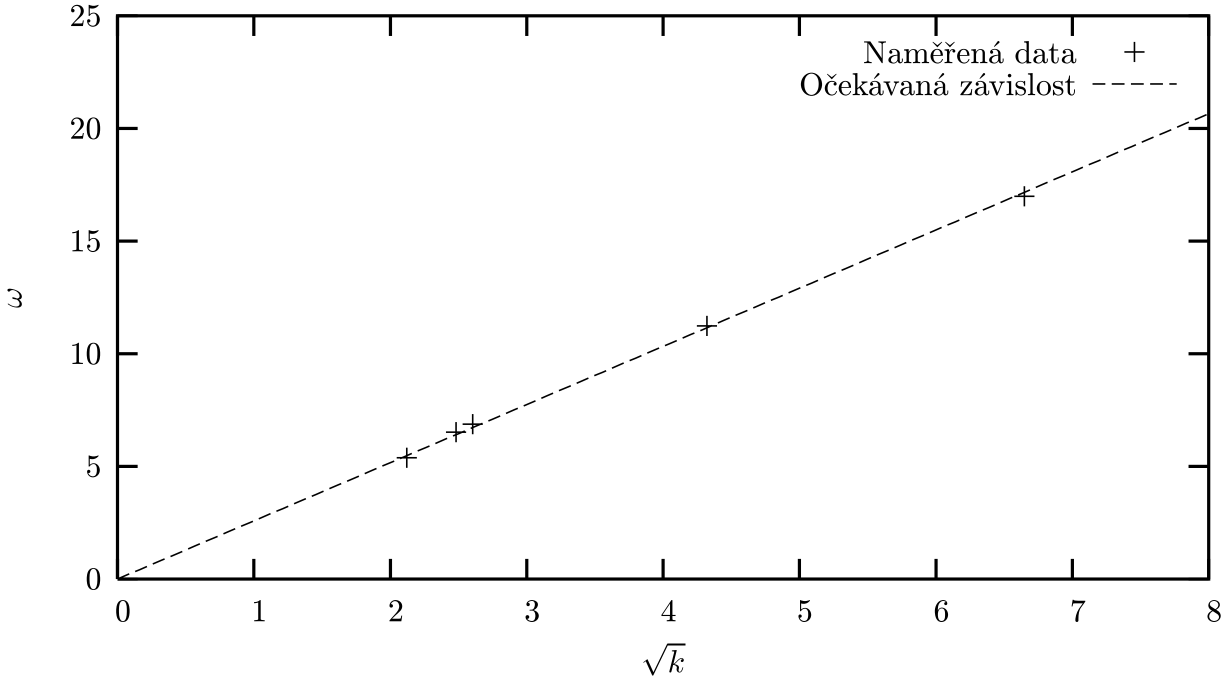
[1] Studijí texty, úloha II. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`

[2] Englich, J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření. Praha 2000.

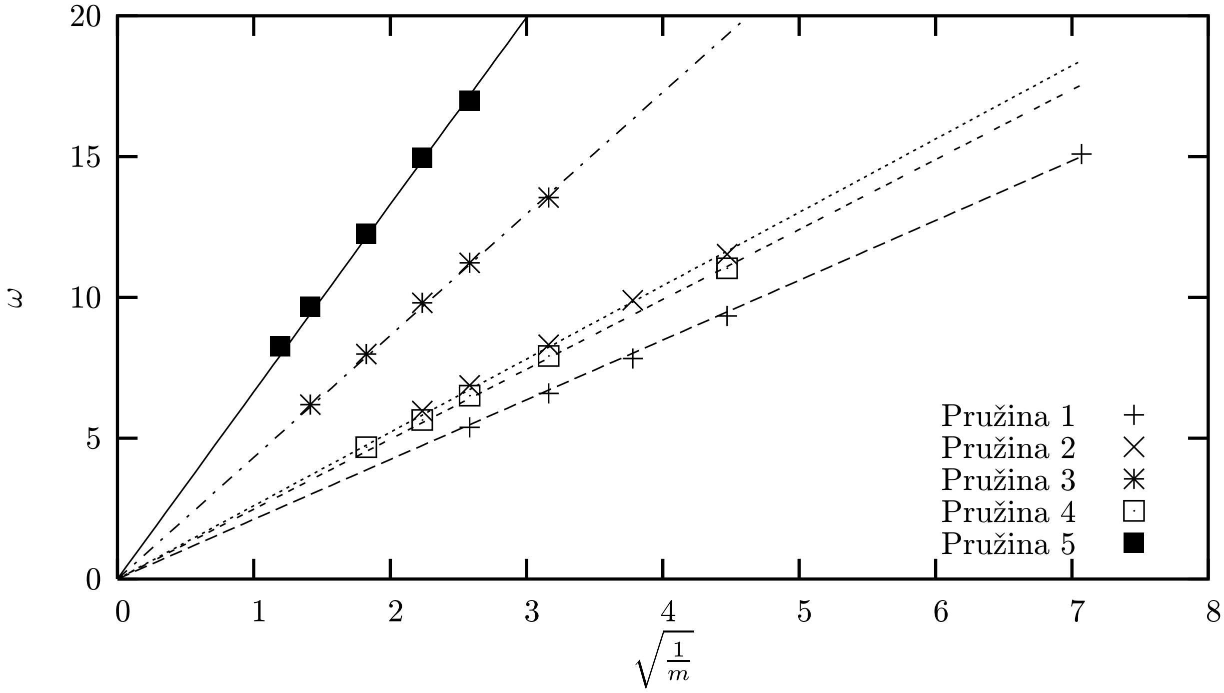
Příloha: grafy



Graf 1. Závislost frekvence kmitů na poměru tuhosti pružiny a hmotnosti závaží



Graf 2. Závislost frekvence kmitů na tuhosti pružiny při konstantní hmotnosti závaží $m = 0.150\,\mathrm{kg}$



Graf 3. Závislost frekvence kmitů na hmotnosti závaží pro pružiny číslo 1 až 5. Očekávané závislosti jsou znázorněné příslušnou přímkou.