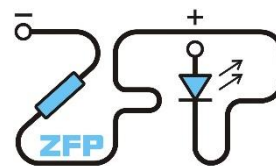


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

## Fyzikální praktikum I



Úloha č.: II

Název úlohy: Studium harmonický kmitů mechanického oscilátoru

Jméno:

Obor: FOF

Datum měření: 18. 3. 2019

Datum odevzdání: 25. 3. 2019

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 3	3
Teoretická část	0 - 2	2
Výsledky a zpracování měření	0 - 9	9
Diskuse výsledků	0 - 4	4
Závěr	0 - 1	1
Seznam použité literatury	0 - 1	1
<b>Celkem</b>	max. 20	20

Posuzoval: .....

dne: .....

## A. Pracovní úkol

1. Změřte tuhost  $k$  pěti pružin metodou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle  $y = y(F)$
3. Změřte tuhost  $k$  pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení  $g$ .
5. Sestrojte grafy závislostí:

a.  $\omega = f(\sqrt{k})$   
b.  $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$

6. Při zpracování použijte lineární regresi.

## B. Teoretická část

Harmonické kmitání je pohyb, při kterém je síla  $F$  přímo úměrná výchylce  $y$  a směřuje do rovnovážné polohy [1]

$$F = -ky, \quad (1)$$

kde  $k > 0$ .

Pohyb je popsán harmonickou funkcí

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

v níž  $y$  je okamžitá výchylka v čase  $t$ ,  $y_m$  amplituda výchylky,  $\omega$  úhlová frekvence a  $\varphi$  počáteční fáze.

Vztah mezi úhlovou frekvencí a dobou kmitu  $T$  je

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (3)$$

Síla  $F_D$  potřebná pro deformaci pružiny je přímo úměrná výchylce

$$F_D = ky, \quad (4)$$

kde konstantu  $k$  je tuhost pružiny.

Pro zjištění tuhosti pružin metodou statickou na pružinu zavěsíme závaží o hmotnosti  $m$  a počkáme, až se soustava ustálí. Mezi tíhovou silou  $G=mg$  a silou pružnosti  $F_D$  nastane rovnováha

$$G - F_D = 0. \quad (5)$$

Rovnovážná poloha se pak posune o  $y_0$ . Dostáváme vztah pro výpočet tuhosti pružiny

$$k = \frac{G}{y_0} = \frac{mg}{y_0}. \quad (6)$$

Dále budeme určovat tuhost pružiny metodou dynamickou. Na pružinu připevníme závaží hmotnosti  $m$  a rozkmitáme. Závaží bude konat harmonický pohyb s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7)$$

Přímým měřením zjistíme dobu kmitu a kombinací vztahů (3) a (7) získáme rovnici pro určení tuhosti pružiny dynamickou metodou

$$k = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (8)$$

Použitím vztahů (3), (6) a (7) můžeme určit místní tíhové zrychlení  $g$

$$g = y_0 \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (9)$$

### **Použité pomůcky a přístroje**

závěsná deska, katetometr, sada laboratorních závaží, 5 pružin, svinovací metr, sonar

## **C. Výsledky měření**

### **Podmínky měření**

Měření bylo prováděno při teplotě 24,7°C, tlaku 989,5 hPa a relativní vlhkosti vzduchu 25 %.

### **Použité hodnoty [2]**

Tíhové zrychlení použité pro dosazování do vztahu (5)  $g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

### **Naměřené hodnoty**

Při měření jsme používali 5 pružin, které jsou označeny A-E. Charakteristiky těchto pružin shrnuje tabulka 1. Tyto charakteristiky jsou pouze informativní a nijak nezasahují do následujících výpočtů, byly tedy měřeny pouze jednou. Hmotnost byla určena váhami s přesností  $\pm 0,1 \text{ g}$ , délka svinovacím metrem a její nejistota byla odhadnuta na  $\pm 0,3 \text{ cm}$ . Do délky pružin nebyly počítány háčky.

*Tabulka 1: Přehled délek a hmotností použitých pružin*

Pružina	$m$ [g]	$l$ [cm]
A	2,4	10,7
B	3,9	11,4
C	6,9	13,7
D	6,2	10,8
E	43,7	12,3

Tabulka 2: Prodloužení pružin 1-5  $y_0$  a periody T jejich kmitů při zatížení závaží o hmotnosti m

A	$y$ [cm]	$m$ [g]	10	20	30	40	50	60	70	80
	53,57	$y'$ [cm]	52,93	52,24	51,60	50,88	50,28	49,48	48,72	48,05
		$y_0$ [cm]	0,64	1,33	1,97	2,69	3,29	4,09	4,85	5,52
		$10 T$ [s]	1,72	2,40	2,92	3,36	3,72	4,04	4,36	4,64
B	52,69	$m$ [g]	20	40	60	80	100	120	140	180
		$y'$ [cm]	51,88	51,29	50,48	49,72	49,12	48,39	47,73	47,05
		$y_0$ [cm]	0,81	1,40	2,21	2,97	3,57	4,30	4,96	5,64
		$10 T$ [s]	1,66	2,40	2,88	3,32	3,68	4,04	4,36	4,64
C	50,64	$m$ [g]	150	180	210	240	270	300	330	360
		$y'$ [cm]	50,09	49,82	49,27	48,84	48,30	47,75	47,03	46,49
		$y_0$ [cm]	0,55	0,82	1,37	1,80	2,34	2,89	3,61	4,15
		$10 T$ [s]	2,48	3,08	3,56	4,08	4,48	4,84	5,24	5,40
D	52,82	$m$ [g]	10	20	30	40	50	60	70	80
		$y'$ [cm]	51,43	50,12	48,75	47,33	46,01	44,55	43,25	42,00
		$y_0$ [cm]	1,39	2,69	4,07	5,48	6,81	8,27	9,57	10,81
		$10 T$ [s]	2,65	3,52	4,25	4,86	5,40	5,85	6,34	6,71
E	51,46	$m$ [g]	90	120	150	180	210	240	270	300
		$y'$ [cm]	50,20	49,51	48,57	47,72	46,70	45,86	44,68	43,72
		$y_0$ [cm]	1,26	1,95	2,89	3,74	4,56	5,60	6,78	7,74
		$10 T$ [s]	3,04	3,80	4,40	4,96	5,28	5,88	6,24	6,60

V tabulce 2 jsou vypsány naměřené hodnoty. Jako  $y$  označujeme hodnotu odečtenou katetometrem pro nezatíženou pružinku,  $y'$  je pak hodnota pro zatíženou pružinku a  $y_0$  jejich rozdíl. Pro jednu z pružinek (E) byly na pokyn vyučující hodnoty naměřeny třikrát, v tabulce 2 je zapsán průměr těchto hodnot. Pro ostatní pružinky byla měření prováděna jednou.

Hmotnosti závaží byly převažovány a uváděné hodnoty se od skutečných liší nejvýše o chybu vah, tedy  $\sigma_m = 0,1$  g. Chybu protažení odhadujeme na  $\sigma_y = 0,1$  cm. Perioda kmitů byla měřena pomocí sonaru. Kmity nebyly vždy stejné, a tak alespoň pro částečné vyrovnání této nestejnomyšlnosti bylo zjišťováno 10 period. Chyba pro  $10 T$  byla odhadnuta na 0,1 s, tedy chyba jedné periody je  $\sigma_T = 0,01$  s. tytéž chyby uvažujeme i u pružiny D, neboť statistické odchylky jsou oproti nim zanedbatelné.

### Statická metoda

Při měření statickou metodou jsme na konec pružinky zavěšovali závaží různých hmotností a zjišťovali její prodloužení – číselné údaje jsou obsaženy v tabulce 2. Závislost prodloužení pružinek na tíze závaží byla vynesena do grafu 1 a údaje pro každou z nich byly proloženy lineární funkcí s předpisem  $y_0 = am$ , v němž pro koeficient  $a$  platí:  $k = \frac{1}{a}$ .

Nepřesnost koeficientu  $a$  je v porovnání s nepřesnostmi měření zanedbatelná, chybu tuhosti tedy spočítáme ze standardního vzorce pro určování nejistoty nepřímých měření [3]

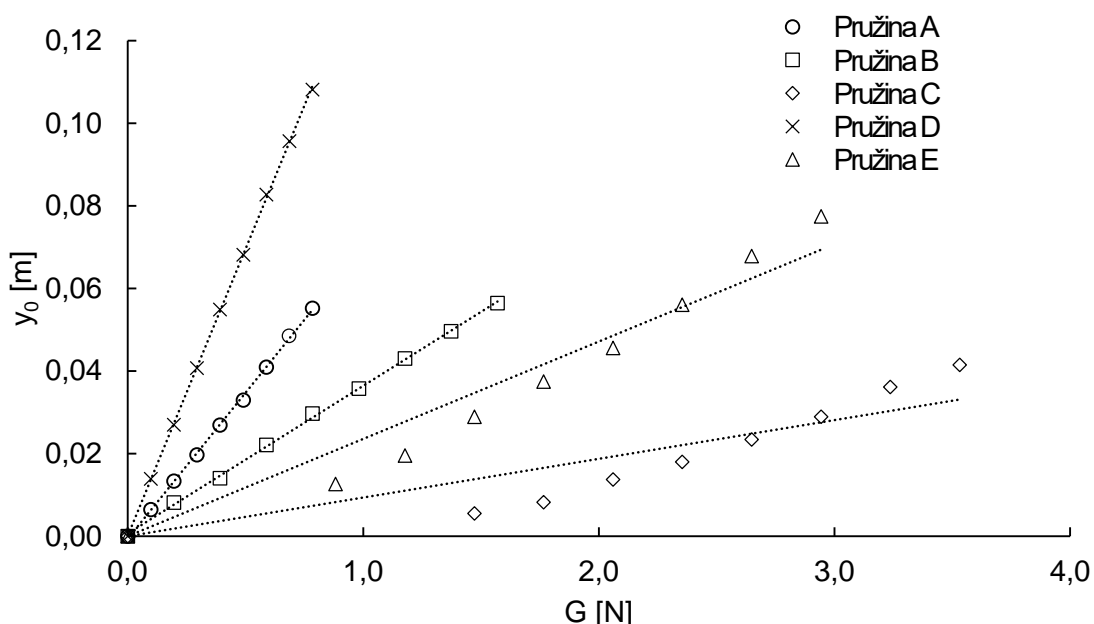
$$\sigma_k = g \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{\sigma_m}{y_{0i}} \right)^2 + \left( \frac{m_i \sigma_y}{y_{0i}^2} \right)^2 \right)}. \quad (10)$$

Určené hodnoty tuhosti pružin i s chybami shrnuje tabulka 3.

*Tabulka 3: Tuhosti pružin určené statickou metodou*

pružina	$k$ [Nm <sup>-1</sup> ]
A	14,4 ± 1,0
B	27,5 ± 1,4
C	107 ± 20
D	7,20 ± 0,25
E	42,4 ± 2,4

## Závislost prodloužení pružin na působící síle



Graf 1: Závislost prodloužení pružin na působící síle

### Dynamická metoda

Pro měření dynamickou metodou jsme na pružinku zavěsili závaží a následně zjišťovali dobu kmitu zatížené pružiny.

Pro určení tuhosti pružiny jsme na hodnoty  $m$  a  $T^2$  aplikovali funkci *linregrese* v programu *Excel*. Použitím této funkce jsme získali koeficient úměrnosti  $b$ , z něž určíme tuhost pružiny jako  $k = \frac{4\pi^2}{b}$ .

Nepřesnost lineární regrese je opět zanedbatelná, chybu měření spočítáme ze standardního vzorce pro určování nejistoty nepřímých měření [3]

$$\sigma_k = 4\pi^2 \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{\sigma_m}{T_i^2} \right)^2 + \left( \frac{2m_i \sigma_T}{T_i^3} \right)^2 \right)}. \quad (11)$$

Výsledky dynamické metody jsou uvedeny v tabulce 4.

Tabulka 4: Tuhosti pružin určené dynamickou metodou

pružina	$k$ [Nm <sup>-1</sup> ]
A	14,4 ± 1,0
B	29,1 ± 2,0
C	53,3 ± 4,0
D	6,86 ± 0,30
E	28,3 ± 1,4

### Tíhové zrychlení

Hodnotu tíhového zrychlení zjišťujeme funkcí *linregrese*. Předpis funkce, kterou bychom v tomto případě prokládali graf je  $T^2 = cy_0$ , kde pro koeficient  $c$  platí:

$g = \frac{4\pi^2}{c}$ . Nepřesnost koeficientu  $c$  zanedbáváme, chybu tíhového zrychlení určíme ze vztahu

$$\sigma_g = 4\pi^2 \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{\sigma_y}{T_i^2} \right)^2 + \left( \frac{y_{0i} \sigma_T}{T_i^3} \right)^2 \right)}. \quad (12)$$

Hodnoty tíhového zrychlení spočtené z výsledků pro jednotlivé pružiny obsahuje tabulka 5.

*Tabulka 5: Tíhové zrychlení určené z měření pro pružiny A-E*

pružina	$g$ [ms <sup>-2</sup> ]
A	9,85 ± 0,67
B	10,38 ± 0,73
C	5,04 ± 0,34
D	9,36 ± 0,33
E	6,61 ± 0,25

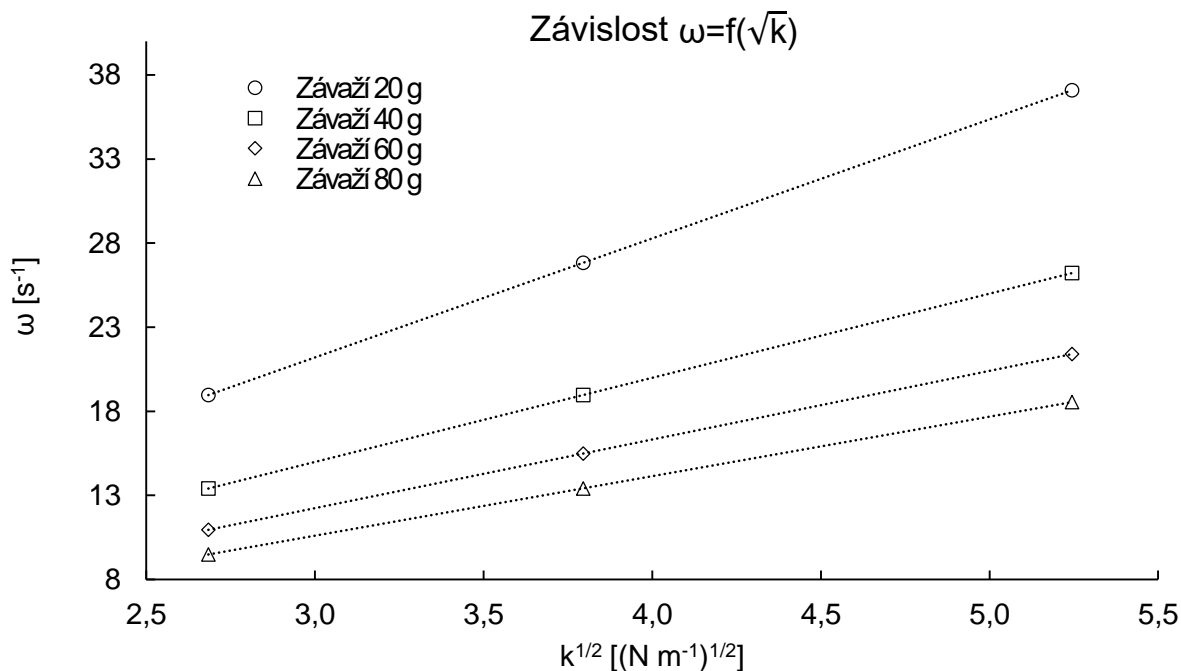
Je zjevné, že měření pro pružiny C a E bylo zatíženo velkou chybou, proto při určování průměrné hodnoty tíhového zrychlení použijeme pouze hodnoty pro pružiny A, B a D.

Místní tíhové zrychlení je  $g = (9,86 \pm 0,35) \text{ ms}^{-2}$ .

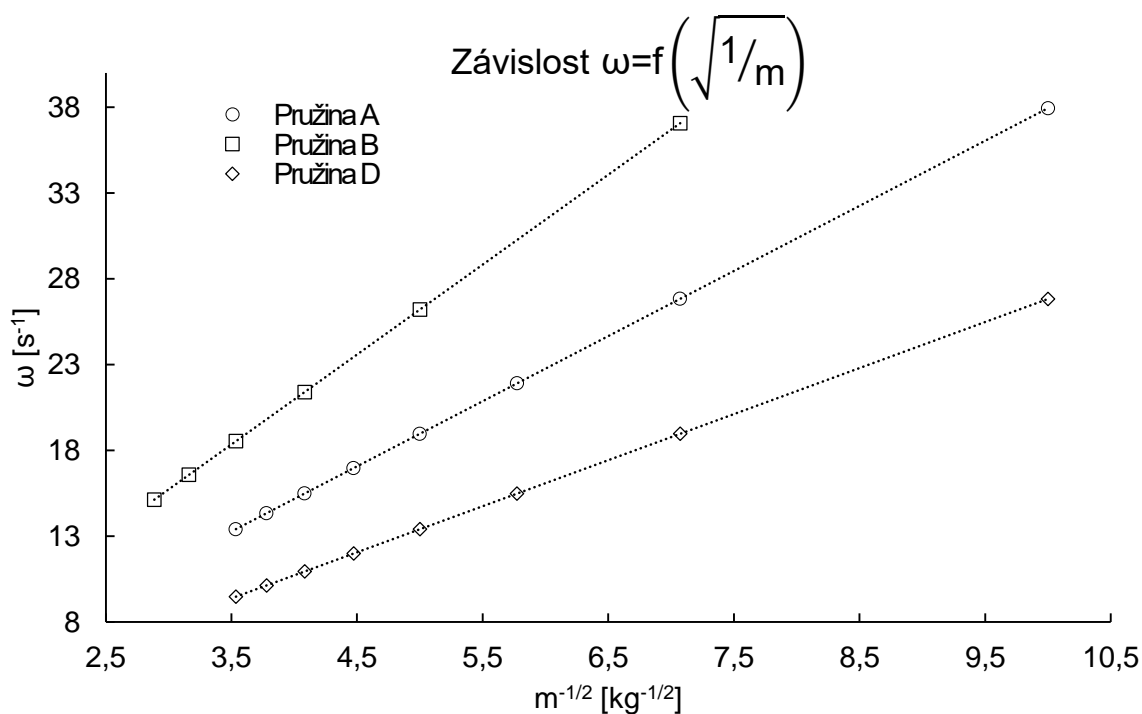
### Grafy závislostí

Pro sestrojení grafů závislostí  $\omega = f(\sqrt{k})$  (graf 2) a  $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$  (graf 3)

jsme využili hodnoty tuhosti pružin získané statickou metodou a dopočetli úhlovou frekvenci. Vzhledem k velikosti chyby měření u pružin C a E jsme pro sestrojení grafů 2 a 3 využili pouze údaje vztahující se k pružinám A, B a D.



Graf 2: Graf závislosti  $\omega = f(\sqrt{k})$



Graf 3: Graf závislosti  $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$

## D. Diskuze

Hodnoty tuhosti pružin určené statickou a dynamickou metodou pro pružiny A, B a D jsou si velmi podobné, tj. intervaly uvažující jejich chybu se protínají. U pružin C a E se hodnoty naměřené oběma metodami velmi liší. Důvodem pro to bude nejspíše to, že jsme pravděpodobně překročili lineární oblast prodloužení, jak lze soudit z grafu 1. Při zatěžování těchto pružin bylo totiž třeba alespoň pro malé natažení zatížit poměrně těžkým závažím a při dalším přidávání byly voleny větší rozestupy hmotností závaží, aby bylo protažení



měřitelné. U těchto dvou pružin považujeme za přesnější tuhosti určené dynamickou metodou.

Dalším zdrojem chyb může být nepřesné odečítání z katetometru. Po zatížení pružinky začaly kmitat a trvalo dlouho, než se uklidnily, a navíc byly znovu rozkmitávány otřesy v budově.

Dále jsme pružinky považovali za nehmotné, což mohlo vnést do výpočtu další chybu.

Tabelovaná hodnota tíhového zrychlení zjištěná pomocí [4] je  $9,83 \text{ ms}^{-2}$ . Tato hodnota se v rámci chyby shoduje s námi určenou hodnotou  $g = (9,86 \pm 0,35) \text{ ms}^{-2}$ , což nám potvrzuje, že měření provedená na pružinách A, B a D byla poměrně přesná.

## E. Závěr

Zjištěné hodnoty pružnosti pro obě metody měření jsou:

pružina	$k \text{ [Nm}^{-1}\text{]}$	
	statická metoda	dynamická metoda
A	$14,4 \pm 1,0$	$14,4 \pm 1,0$
B	$27,5 \pm 1,4$	$29,1 \pm 2,0$
C	$107 \pm 20$	$53,3 \pm 4,0$
D	$7,20 \pm 0,25$	$6,86 \pm 0,30$
E	$42,4 \pm 2,4$	$28,3 \pm 1,4$

Zjištěná hodnota místního tíhového zrychlení je  $g = (9,86 \pm 0,35) \text{ ms}^{-2}$ .

## F. Seznam použité literatury a zdroje informací

[1] KVOF MFF UK. *Studijní text k fyzikálnímu praktiku I, úloha II* [online]. [cit. 19.3.2019]. Dostupný na WWW:

[https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_102.pdf](https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_102.pdf)

[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch. *Fyzikální a matematické tabulky*. Praha: SNTL, 1980.

[3] BROŽ, Jaromír a kol. *Základy fyzikálních měření I*. Praha: SPN, 1983.

[4] *Wolfram|Alpha Widgets: Gravitation fields* [online]. [cit. 19.3.2019]. Dostupný na WWW:

<https://www.wolframalpha.com/widget/widgetPopup.jsp?p=v&id=d34e8683df527e3555153d979bcda9cf&title=Gravitational%20Fields&theme=red&i0=Prague&podSelect=&includepodid=Input&includepodid=GravitationalFieldStrength&includepodid=LocationOfTheGeographicalItemOfInterest>