

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM ...

Úloha č.

Název:

Pracoval: stud. skup. dne

Odevzdal dne:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 – 5	
Teoretická část	0 – 1	
Výsledky měření	0 – 8	
Diskuse výsledků	0 – 4	
Závěr	0 – 1	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: dne

Pracovní úkoly

1. Změřte tuhost k pěti pružin metodou statickou
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle $y = i(F)$
3. Změřte tuhost k pěti pružin metodou dynamickou
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g
5. Sestrojte grafy závislosti: $\omega = f(\sqrt{k})$ a $\omega = f(\frac{1}{\sqrt{m}})$
6. Při zpracování použijte lineární regresi

1 Teoretická část

Harmonický kmit je pohyb hmotného bodu v přímce, který je popsán harmonickou funkcí:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

kde y je okamžitá výchylka z rovnovážné polohy, A maximální výchylka, ω kruhová frekvence, φ počáteční fázový stav a t uplynulý čas. Kruhová frekvence je svázána s periodou jednoho kmitu T vztahem:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

Harmonický kmit vzniká působením síly F v závislosti na výchylce y vyjádřené následující rovnicí:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{y} \quad (3)$$

kde konstanta úměrnosti k je tuhost systému, v našem případě pružiny. Tuhost pružiny je konstanta úměrnosti mezi velikostí potřebné síly F a způsobeného prodloužení pružiny Δy :

$$F = k\Delta y \quad (4)$$

Tuhost pružiny k zjišťujeme statickou metodou, kdy na zavěšenou pružinu upevníme závaží hmotnosti m . Až se systém ustálí v nové rovnovážné poloze, změříme *katetometrem* prodloužení pružiny y_0 vůči původnímu stavu. Výslednice sil na tento systém v rovnováze je nulová, tedy:

$$G - F = 0 \quad (5)$$

$$G = ky_0 \quad (6)$$

kde G je tíhová síla působící na závaží daná vztahem:

$$G = mg \quad (7)$$

g je tíhové zrychlení. V našem případě ve zpracovaných výsledcích y značí polohu konce pružinky na číselné ose *katetometru* a y_0 rozdíl oproti její poloze, když není zatížena. Více viz. [?, str. 157-159].

Tuhost můžeme měřit i metodou dynamickou. Na pružinu zavěsíme závaží hmotnosti m a rozkmitáme. Závaží koná harmonický pohyb s úhlovou frekvencí:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

Zjišťujeme dobu jednoho kmitu, tedy periodu T . Pro větší přesnost měříme dobu např. 10, 20, 40 kmitů (já měřil dobu t 40-ti kmitů), z níž pak T vypočítáme [?, str. 158]. Srovnáním rovnic (2) a (8) vyjádříme tuhost pružiny k .

Tíhové zrychlení g určíme na základě výsledků měření porovnáním rovnic (6), (7) a (8) (viz. [?, str. 159]):

$$g = \omega^2 y_0 \quad (9)$$

Použité přístroje

Katetometr *Katetometr* je přístroj na měření výškových odlehlostí. Jeho nejdůležitější součástí je svislá centimetrová stupnice a jezdec s noniem, na kterém je uchycen dalekohled s nitkovým křížem. Před měřením je nutné postavit celý přístroj do přímé polohy pomocí stavěcích šroubů a libel na podstavci, taktéž nastavit přímou polohu dalekohledu. Samotné měření probíhá tak, že v hledáčku dalekohledu nitkovým křížem zaměříme měřený předmět a zaostříme, pak odečteme číselnou hodnotu ze stupnice. Posuvem dalekohledu ve směru stupnice tak můžeme odečítat výškové odlehlosti od námi vybraného předmětu (bodu). Nonium umožňuje měřit rozdíly až 0.1 mm. Pro otřesy podlahy v laboratoři se ale výsledná přesnost měření odlehlostí pohybuje okolo 1 mm.

Stopky Obvykle se uvádí, že chyba způsobená reakční dobou člověka při měření přesných okamžiků je asi 0.2 s (viz. [?, str. 83-84]).

Další poznámky

Měření probíhalo přesně podle postupu. Jedinou nesrovnalostí je teoretický předpoklad, že těleso (popř. systém) kmitá v přímce, čehož v praxi není možno dosáhnout a kmity v přímém směru jsou vždy doprovázeny i minimálním rozkyvem pružinky do stran, který ale ovlivňuje naměřený výsledek. Jak moc viz. další části.

2 Výsledky měření

Používané konstanty

Tíhové zrychlení $g = 9.81m.s^{-2}$
Pí $\pi = 3.141592654$

Statická metoda

Při použití lineární regrese a metody nejmenších čtverců vycházíme z lineární rovnice $y = A + Bm$, kde identifikujeme konstantu A jako původní polohu konce pružinky bez zatížení a konstantu B jako:

$$B = -\frac{g}{k} \quad (10)$$

Konstantu B a A určíme z naměřených hodnot metodou nejmenších čtverců, tuhost k pak spočítáme podle (10).

Pružina č. 1

$m[10^{-3}kg]$	0	20	50	100	200	500
$y[10^{-2}m]$	44.75	44.17	43.36	42.10	39.25	31.22
$y_0[10^{-2}m]$	0.0	0.58	1.39	2.65	5.40	13.53

Pružina č. 2

$m[10^{-3}kg]$	0	50	100	150	200	250	400
$y[10^{-2}m]$	56.27	55.24	54.14	52.93	51.92	49.83	47.68
$y_0[10^{-2}m]$	0.0	1.03	2.13	3.34	4.35	6.44	8.59

Pružina č. 3

$m[10^{-3}kg]$	0	2	10	20	30	40
$y[10^{-2}m]$	59.95	59.28	57.32	55.00	52.63	50.24
$y_0[10^{-2}m]$	0.0	0.67	2.63	4.95	7.32	9.71

Pružina č. 4

$m[10^{-3}kg]$	0	10	20	30	40	50
$y[10^{-2}m]$	57.27	55.67	53.90	52.47	50.87	49.43
$y_0[10^{-2}m]$	0.0	1.60	3.37	4.80	6.40	7.84

Pružina č. 5

$m[10^{-3}kg]$	0	20	40	50	100	200
$y[10^{-2}m]$	51.78	50.88	49.84	49.27	46.74	41.45
$y_0[10^{-2}m]$	0.0	0.90	1.94	2.51	5.04	10.33

Table 1: Poloha konce pružinky y při zatížení závažím hmotnosti m a její odpovídající prodloužení y_0

Za předpokladu, že uvedené hmotnosti závaží jsou dostatečně přesné, z původního odhadu maximální odchylky měření katetometrem (cca 1 mm) spočítáme statistickou chybu konstanty B (viz. [?, str. 98-107]) a za předpokladu, že námi použitá hodnota tíhového zrychlení je naměřena se zanedbatelnou chybou oproti našim měřením, jednoduše vyjádříme i chybu hledané tuhosti pružiny využitím relativních chyb.

Výsledky

- Pružina č. 1: $B_1 = (-270.54 \pm 0.24) \cdot 10^{-3} m \cdot kg^{-1} \rightarrow k_1 = (36.26 \pm 0.32) N \cdot m^{-1}$
- Pružina č. 2: $B_2 = (-223.8 \pm 3.0) \cdot 10^{-3} m \cdot kg^{-1} \rightarrow k_2 = (43.83 \pm 0.59) N \cdot m^{-1}$
- Pružina č. 3: $B_3 = (-2400 \pm 28) \cdot 10^{-3} m \cdot kg^{-1} \rightarrow k_3 = (4.086 \pm 0.048) N \cdot m^{-1}$
- Pružina č. 4: $B_4 = (-1572 \pm 24) \cdot 10^{-3} m \cdot kg^{-1} \rightarrow k_4 = (6.239 \pm 0.095) N \cdot m^{-1}$
- Pružina č. 5: $B_5 = (-519.3 \pm 6.1) \cdot 10^{-3} m \cdot kg^{-1} \rightarrow k_5 = (18.89 \pm 0.22) N \cdot m^{-1}$

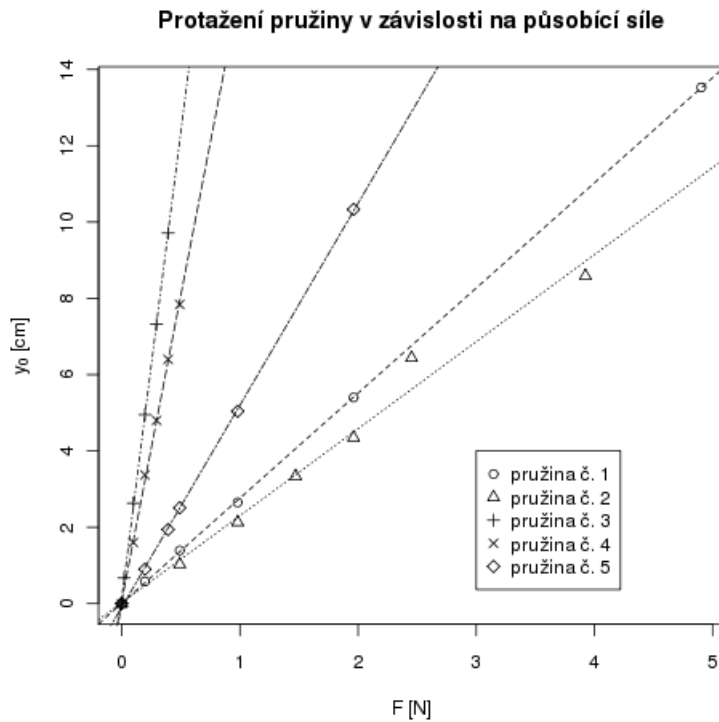


Figure 1: Graf závislosti protážení pružiny y_0 na působící síle F

Dynamická metoda

Při použití lineární regrese pro dynamickou metodu měření vyjdeme z rovnic (2) a (8) a vyjádříme T jako:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (11)$$

Měříme dobu 40-ti kmitů t , tedy rovnici upravíme:

$$t = 80\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (12)$$

Ve tvaru obecné lineární rovnice $y = Q + Kx$ identifikujeme jednotlivé členy rovnice (12):

$$y = t \quad (13)$$

$$x = \sqrt{m} \quad (14)$$

$$K = \frac{80\pi}{\sqrt{k}} \quad (15)$$

Při měření je největší odchylka způsobena reakční dobou člověka (cca 0.2 s), k té ještě přičtu chybu pravděpodobnou vzhledem ke střední hodnotě naměřených časů t . Konstantu K určím opět metodou nejmenších čtverců ale za použití vážených průměrů, neboť každé měření má lehce odlišnou chybu. Z K pak spočtu hledanou tuhost pružiny:

Výsledky

- Pružina č. 1: $K_1 = (40.49 \pm 0.80)s.kg^{-\frac{1}{2}} \rightarrow k_1 = (38.5 \pm 1.5)N.m^{-1}$
- Pružina č. 2: $K_2 = (35.6 \pm 1.2)s.kg^{-\frac{1}{2}} \rightarrow k_2 = (49.7 \pm 3.3)N.m^{-1}$
- Pružina č. 3: $K_3 = (150.7 \pm 3.0)s.kg^{-\frac{1}{2}} \rightarrow k_3 = (2.77 \pm 0.11)N.m^{-1}$
- Pružina č. 4: $K_4 = (100.3 \pm 3.7)s.kg^{-\frac{1}{2}} \rightarrow k_4 = (6.27 \pm 0.46)N.m^{-1}$
- Pružina č. 5: $K_5 = (55.9 \pm 1.4)s.kg^{-\frac{1}{2}} \rightarrow k_5 = (20.24 \pm 0.98)N.m^{-1}$

Tabulky s výsledky měření se nachází na další straně...

Pružina č. 1

$m[10^{-3}kg]$	100		200		500	
č. měření	doba 40 kmitů [s]					
	t	Δt	t	Δt	t	Δt
1	14.46	-0.06	19.79	+0.00	30.45	+0.11
2	14.39	-0.13	19.78	-0.01	30.33	-0.01
3	14.65	+0.13	19.78	-0.01	30.36	+0.02
4	14.55	+0.03	19.78	-0.01	30.29	-0.05
5	14.53	+0.01	19.82	+0.03	30.28	-0.06
\bar{t}	14.52	0.23	19.79	0.21	30.34	0.22

Pružina č. 2

$m[10^{-3}kg]$	150		200		400	
č. měření	doba 40 kmitů [s]					
	t	Δt	t	Δt	t	Δt
1	14.53	+0.01	16.40	-0.02	23.09	-0.11
2	14.53	+0.01	16.54	+0.12	23.23	+0.03
3	14.53	+0.01	16.42	+0.00	23.22	+0.02
4	14.50	-0.02	16.34	-0.08	23.26	+0.06
5	14.53	+0.01	16.40	-0.02	23.22	+0.02
\bar{t}	14.52	0.20	16.42	0.22	23.20	0.22

Pružina č.3

$m[10^{-3}kg]$	10		20		40	
č. měření	doba 40 kmitů [s]					
	t	Δt	t	Δt	t	Δt
1	12.78	+0.02	17.84	-0.03	27.74	+0.05
2	12.76	+0.00	17.83	-0.04	27.64	-0.05
3	12.82	+0.06	17.84	-0.03	27.69	+0.00
4	12.64	-0.12	17.97	+0.10	27.65	-0.04
5	12.79	+0.03	17.87	+0.00	27.72	+0.03
\bar{t}	12.76	0.22	17.87	0.22	27.69	0.21

Pružina č.4

$m[10^{-3}kg]$	20		30		50	
č. měření	doba 40 kmitů [s]					
	t	Δt	t	Δt	t	Δt
1	14.45	+0.01	17.94	+0.19	22.73	+0.03
2	14.40	-0.04	17.86	+0.11	22.70	+0.00
3	14.50	+0.06	17.67	-0.08	22.65	-0.05
4	14.35	-0.09	17.67	-0.08	22.74	+0.04
5	14.49	+0.05	17.62	-0.13	22.67	-0.03
\bar{t}	14.44	0.22	17.75	0.24	22.70	0.21

Pružina č. 5

$m[10^{-3}kg]$	50		100		200	
č. měření	doba 40 kmitů [s]					
	t	Δt	t	Δt	t	Δt
1	13.16	+0.00	18.20	-0.03	25.66	+0.02
2	13.13	-0.03	18.26	+0.03	25.68	+0.04
3	13.12	-0.04	18.26	+0.03	25.58	-0.06
4	13.25	+0.09	18.17	-0.06	25.70	+0.06
5	13.12	-0.04	18.27	+0.04	25.60	-0.04
\bar{t}	13.16	0.22	18.23	0.21	25.64	0.22

Table 2: Doba t 40-ti kmitů závaží hmotnosti m , odchylka od průměru a celková odhadnutá chyba Δt

Tíhové zrychlení

Ke zjištění tíhového zrychlení použijeme přímo rovnici (9), kterou ještě pro naše potřeby můžeme upravit přímo do tvaru:

$$g = \left(\frac{80\pi}{t}\right)^2 y_0 \quad (16)$$

Naměřené hodnoty jsou shrnuty v tabulce č. 3. Tíhové zrychlení určíme jako aritmetický průměr a jeho chybu jako statistickou chybu průměru z odchylek jednotlivých měření. ($\Delta y_0 = 1\text{mm}$, Δt viz. tabulka č. 2)

Výsledek

- Tíhové zrychlení: $g = (9.487 \pm 0.086)\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$m[10^{-3}\text{kg}]$	$t[\text{s}]$	$\omega[\text{s}^{-1}]$	$y_0[10^{-2}\text{m}]$	$g[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}]$
10	12.76	19.6965	2.63	10.2031
20	17.87	14.0642	4.95	9.7912
20	14.44	17.4049	4.95	10.2088
30	17.75	14.1593	4.80	9.6233
40	27.69	9.0765	9.71	7.9993
50	22.70	11.0717	7.84	9.6105
50	13.16	19.0978	2.51	9.1546
100	14.52	17.3091	2.65	7.9395
100	18.23	13.7865	5.04	9.5794
150	14.52	17.3091	3.34	10.0067
200	19.79	12.6997	5.40	8.7093
200	16.42	15.3062	4.35	10.1911
200	25.64	9.8022	10.33	9.9253
400	23.20	10.8331	8.59	10.0808
500	30.34	8.2837	13.53	9.2842
				9.4872

Table 3: Souhrnné hodnoty k výpočtu odpovídajícího tíhového zrychlení a jeho střední hodnoty g

Úhlová frekvence a hmotnost

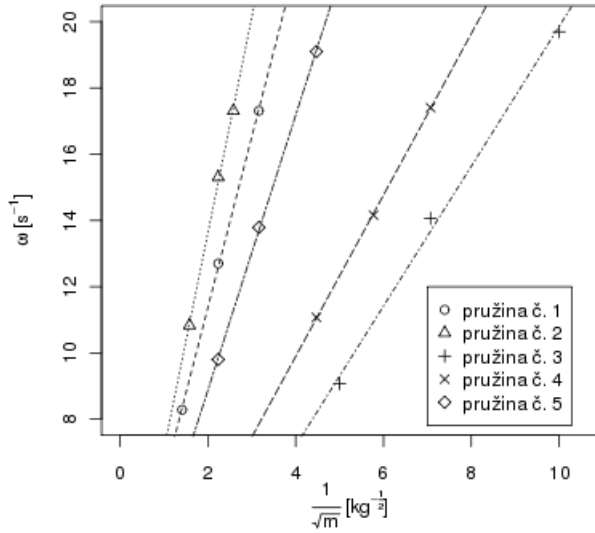


Figure 2: Závislost úhl. frekvence ω na $\frac{1}{\sqrt{m}}$

Pružina č. 1

$m[10^{-3}kg]$	100	200	500
$\frac{1}{\sqrt{m}}[kg^{-\frac{1}{2}}]$	3.1623	2.2361	1.4142
$\omega[s^{-1}]$	17.3090	12.6997	8.2837

Pružina č. 2

$m[10^{-3}kg]$	150	200	400
$\frac{1}{\sqrt{m}}[kg^{-\frac{1}{2}}]$	2.5820	2.2361	1.5811
$\omega[s^{-1}]$	17.3090	15.3062	10.8331

Pružina č. 3

$m[10^{-3}kg]$	10	20	40
$\frac{1}{\sqrt{m}}[kg^{-\frac{1}{2}}]$	10.0000	7.0711	5.0000
$\omega[s^{-1}]$	19.6965	14.0642	9.0765

Pružina č. 4

$m[10^{-3}kg]$	20	30	50
$\frac{1}{\sqrt{m}}[kg^{-\frac{1}{2}}]$	7.0711	5.7735	4.4721
$\omega[s^{-1}]$	17.4049	14.1593	11.0717

Pružina č. 5

$m[10^{-3}kg]$	50	100	200
$\frac{1}{\sqrt{m}}[kg^{-\frac{1}{2}}]$	4.4721	3.1623	2.2361
$\omega[s^{-1}]$	19.0978	13.7865	9.8022

Table 5: Hodnoty $\frac{1}{\sqrt{m}}$ a ω ke grafu č. 2

	Pružina č. 5	Pružina č. 1	Pružina č. 2
$k[N.m^{-1}]$	20.24	38.5	49.7
$\sqrt{k}[N^{\frac{1}{2}}.m^{-\frac{1}{2}}]$	4.4989	6.2048	7.0498
$\omega[s^{-1}]$	9.8022	12.6997	15.3062

Table 4: Hodnoty \sqrt{k} a ω při $m = 200g$ ke grafu č. 3

Úhlová frekvence při $m=200g$

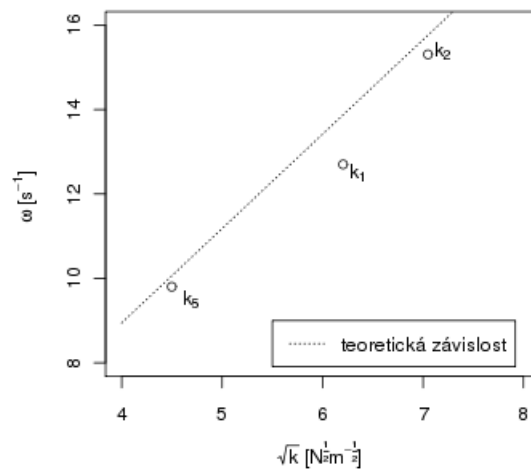


Figure 3: Závislost úhl. frekvence ω na \sqrt{k}

3 Diskuse výsledků

Použití lineární regrese pro statickou metodu měření tuhosti pružin generuje vcelku malou relativní chybu měření okolo 1%, navíc skutečnost, že systém je během měření v klidu, minimalizuje i hrubé chyby lidského faktoru, které jsou u dynamické metody nevyhnutelné. Vedle započítané reakční doby člověka se pak přidává i neschopnost přesně odečíst fázi pohybu, ve které se pružinka nachází, popř. při menším zatížení, a tedy větší frekvenci kmitů, určit jejich přesný počet.

Původ poměrně velkého rozdílu mezi výsledky získané statickou a dynamickou metodou (kromě pružin 1 a 4) můžeme samozřejmě hledat právě ve výše zmíněných okolnostech použití dynamické metody. Pravděpodobnější je však vliv rozkvyv pružinky do stran během kmitů v přímém směru (jak bylo naznačeno v teoretické části). I přes pokusy rozkvyv do stran minimalizovat, se ho nikdy nepodařilo zcela eliminovat, a ten je tak vždy viditelně patrný. Při ideálním provedení lze dokonce pozorovat, jak se kmity podélné (v přímém směru) pomalu mění v kývání až do okamžiku, kdy kmity zcela ustanou a pružina se houpe pouze jako kyvadlo. Tento druh pohybu pak opět volně přechází zpět ke kmitům. Tabulka č. 6 zaznamenává přibližné hodnoty doby 40-ti kmitů všech pružin při zavěšení nejtěžšího použitého závaží a při úmyslném rozhoupání do stran. Hodnoty jsou přibližné, neboť není zcela jasné, jak od pohledu určit fázi pohybu, ve kterém se pružina nachází, a rozkvyv byl volen vzhledem k jiným pozorovaným, vzniklým samovolně (ale neměřeným). Porovnáním s výsledky z tabulky č. 2 zjišťujeme, že se hodnoty liší i o půl řádu, při určení tuhosti pružiny je pak rozdíl znatelný už na místě prvních dvou platných cifer. Změny navíc odpovídají skutečnosti, že tuhosti určené dynamickou metodou byly (až na pružinu č. 3) větší než výsledky statické metody.

Pružina č.	1	2	3	4	5
$m[10^{-3}kg]$	500	400	40	50	200
$t[s]$ cca	25.5	21	21	18	20

Table 6: Přibližná doba 40-ti kmitů při úmyslném rozkývání

Stejně je ovlivněn i výpočet tíhového zrychlení g , jehož výsledek ani s chybovým intervalem nezahrnuje běžnou hodnotu a indikuje tak skrytou systematickou chybu. Vzhledem k rozdílům mezi dynamickou a statickou metodou se však udržel alespoň s platností první platné cifry s relativní odchylkou asi 3.5% od očekávané hodnoty okolo $9.8 m.s^{-2}$.

Pro sestrojení závislosti kruhové frekvence ω na odmocnině z tuhosti pružiny \sqrt{k} bylo zapotřebí najít společný parametr $\frac{1}{\sqrt{m}}$, pro který je doba 40-ti kmitů snadno měřitelná (cca nad 15 s) a zároveň se pružina zatížením nedeformovala a neztrácela tak své uvažované vlastnosti. Vzhledem k rozsahu tuhostí pružin tak nakonec bylo učiněno pouze pro pružiny 1, 2, 5.

4 Závěr

Souhrnné výsledky

Výsledky na základě použití statické metody

$$\text{Pružina č. 1: } k_1 = (36.26 \pm 0.32)N.m^{-1}$$

$$\text{Pružina č. 2: } k_2 = (43.83 \pm 0.59)N.m^{-1}$$

$$\text{Pružina č. 3: } k_3 = (4.086 \pm 0.048)N.m^{-1}$$

$$\text{Pružina č. 4: } k_4 = (6.239 \pm 0.095)N.m^{-1}$$

$$\text{Pružina č. 5: } k_5 = (18.89 \pm 0.22)N.m^{-1}$$

Výsledky na základě použití dynamické metody

$$\text{Pružina č. 1: } k_1 = (38.5 \pm 1.5)N.m^{-1}$$

$$\text{Pružina č. 2: } k_2 = (49.7 \pm 3.3)N.m^{-1}$$

$$\text{Pružina č. 3: } k_3 = (2.77 \pm 0.11)N.m^{-1}$$

$$\text{Pružina č. 4: } k_4 = (6.27 \pm 0.46)N.m^{-1}$$

$$\text{Pružina č. 5: } k_5 = (20.24 \pm 0.98)N.m^{-1}$$

Tíhové zrychlení

$$g = (9.487 \pm 0.086)m.s^{-2}$$

Výsledky sice nejsou zcela přesné a hodnoty získané statickou a dynamickou metodou se na první pohled výrazně liší, ale teoreticky si neodporují. Vzhledem k diskusi považuji tuhosti pružin určené statickou metodou za věrohodnější.

5 Literatura

Použitá literatura

- [1] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983
- [2] J. Anděl: Matematická statistika, SNTL, Praha 1985