

## 1 Pracovní úkoly

1. Změřte tuhost  $k$  pěti pružin metodou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle  $y_0 = y_0(F)$ .
3. Změřte tuhost  $k$  pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení  $g$ .
5. Sestrojte grafy závislostí.

$$(a) \omega = f(\sqrt{k})$$

$$(b) \omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$

6. Při zpracování použijte lineární regresi.

## 2 Teoretická část

Závaží hmotnosti  $m$  svisle kmitající v tíhovém poli zavěšené na šroubovité pružině je příkladem mechanického oscilátoru [1].

Pokud na pružinu zavěšíme závaží hmotnosti  $m$ , budou na závaží působit dvě síly. Síla tíhová  $G = mg$ , kde  $g$  je místní tíhové zrychlení, a síla, kterou na závaží působí pružina  $F = ky$ , kde  $k$  je tuhost pružiny a  $y$  prodloužení pružiny.

Na závaží bude působit nenulová výslednice sil svisle dolů, dokud se síly nevyrovnejší. Poté platí rovnost  $G = F$  a pro prodloužení pružiny platí

$$y_0 = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

Po vychýlení z rovnovážné polohy začne závaží kmitat s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

Úhlová frekvence souvisí s periodou

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

Z rovnic (2), (3) celkově dostaneme

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} m \quad (4)$$

Pokud změříme  $y_0$  a  $T$  je možné vypočítat tíhové zrychlení podle rovnice

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} y_0 \quad (5)$$

Body  $(x_i, y_i)$  je možné proložit lineární závislost  $y = Kx$  a parametr lineární regrese  $K$  určit podle vztahu [2]

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (6)$$

za předpokladu, že nejistoty všech měření  $y_i$  jsou stejné, tedy  $\sigma_i = \sigma$ . Dále lze disperzi výpočtu odhadnout podle rovnice

$$\sigma_K^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Kx_i)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (7)$$

### 3 Výsledky měření

Měření bylo provedeno na pěti pružinách, jejichž hmotnosti a délky jsou uvedeny v tabulce 1.

Při výpočtech používám hodnotu tíhového zrychlení  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  [3]. Experiment byl proveden při teplotě  $t = 23,9^\circ\text{C}$ , tlaku  $p = 981,8 \text{ hPa}$  a relativní vlhkosti vzduchu  $\Phi = 27,9\%$ .

Tabulka 1: Hmotnosti a délky pružin

	pružina 1	pružina 2	pružina 3	pružina 4	pružina 5
$\frac{m}{g}$	5,6	3,9	6,3	2,6	6,2
$\frac{l}{\text{cm}}$	23,2	13,5	12,5	11,7	10,2

#### 3.1 Statická metoda

Prodloužení pružin po závěsu závaží bylo změřeno pomocí katetometru. Podstatnou součástí katetometru je svislá stupnice, podle které se pohybuje dalekohled s vodorovnou optickou osou. Po nastavení správné vodorovné polohy dalekohledu jsem vždy nejdříve odečetl hodnotu  $h_0$  pružiny bez závaží. Po zavěšení každého závaží jsem poté odečítal hodnoty  $h$  přímo z katetometru a prodloužení pružiny dopočítal podle rovnice  $y_0 = h_0 - h$ .

Posuv dalekohledu lze odečíst s přesností  $0,1 \text{ mm}$ , ovšem kvůli otřesům podlahy v laboratoři odhaduji přesnost měření na  $\sigma_{y_0} = 1 \text{ mm}$ .

Naměřené hodnoty statickou metodou jsou uvedené v tabulce 2. Grafickou závislost prodloužení pružin na působící síle poté zobrazuje graf 1.

Pro každou pružinu byla určena závislost  $y = A \cdot F$ , kde parametr lineární regrese  $A$  je určen dle (6) a chyba tohoto parametru dle (7). Z parametru lineární regrese poté byla na základě rovnice (1) určena tuhost pružin  $k = \frac{1}{A}$  a nejista měření určena podle zákona šíření chyb:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{m_i g}{y_{0i}} \sigma_{y_0} \right)^2} \quad (8)$$

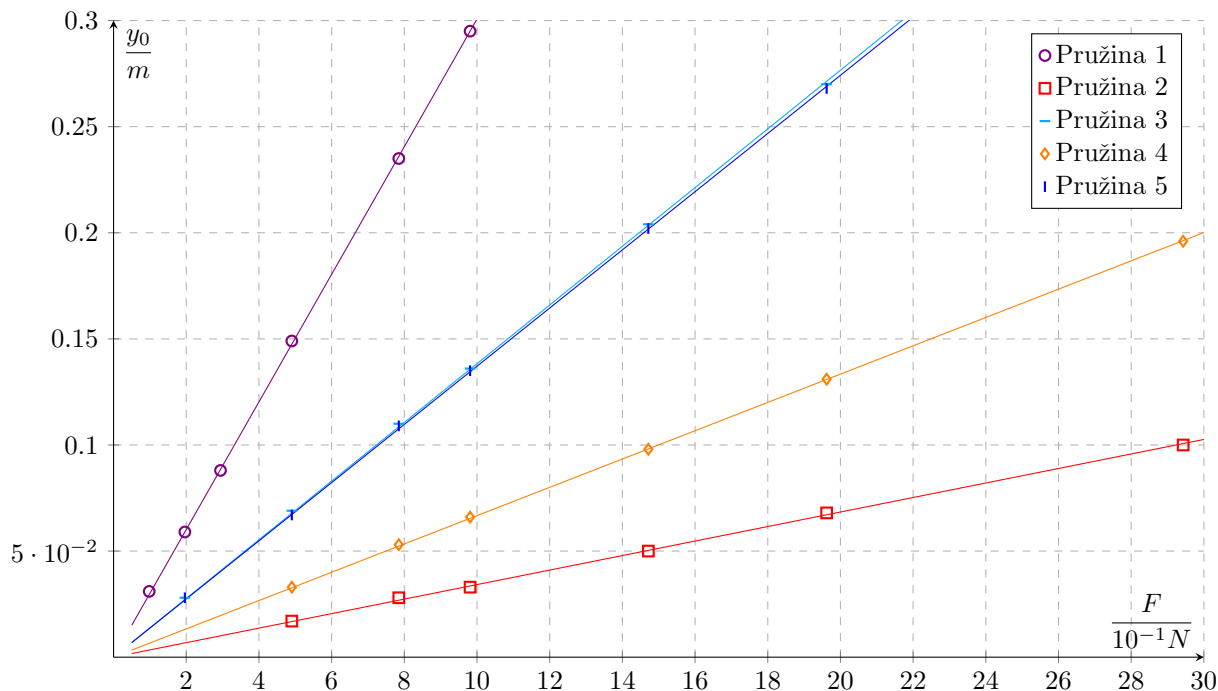
Výsledky jsou uvedeny v tabulce 3.

Tabulka 2: Naměřené hodnoty prodloužení pružin

Pružina 1		Pružina 2		Pružina 3		Pružina 4		Pružina 5	
$\frac{m}{g}$	$\frac{y_0}{\text{cm}}$	$\frac{m}{g}$	$\frac{y_0}{\text{cm}}$	$\frac{m}{g}$	$\frac{y_0}{\text{cm}}$	$\frac{m}{g}$	$\frac{y_0}{\text{cm}}$	$\frac{m}{g}$	$\frac{y_0}{\text{cm}}$
10	3,1	50	1,7	20	2,8	50	3,3	20	2,8
20	5,9	80	2,8	50	6,9	80	5,3	50	6,7
30	8,8	100	3,3	80	11,0	100	6,6	80	10,9
50	14,9	150	5,0	100	13,6	150	9,8	100	13,5
80	23,5	200	6,8	150	20,4	200	13,1	150	20,2
100	29,5	300	10,0	200	27,0	300	19,6	200	26,8

Tabulka 3: Výsledky statické metody

	Parametr lineární regrese	Tuhost pružiny	Relativní chyba
Pružina 1	$A = (300,7 \pm 0,8) 10^{-3} mN^{-1}$	$k = (3,33 \pm 0,06) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 2\%$
Pružina 2	$A = (34,2 \pm 0,2) 10^{-3} mN^{-1}$	$k = (29,0 \pm 1,0) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 4\%$
Pružina 3	$A = (138,3 \pm 0,4) 10^{-3} mN^{-1}$	$k = (7,2 \pm 0,1) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 2\%$
Pružina 4	$A = (66,7 \pm 0,1) 10^{-3} mN^{-1}$	$k = (15,0 \pm 0,3) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 2\%$
Pružina 5	$A = (137,1 \pm 0,3) 10^{-3} mN^{-1}$	$k = (7,3 \pm 0,1) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 2\%$

Graf 1: Graf závislosti prodloužení pružiny  $y_0$  na působící síle  $F$ 

### 3.2 Dynamická metoda

Měření period kmitů bylo provedeno pomocí čidla polohy a pohybu se vzorkovací frekvencí  $25 \text{ Hz}$ . Pro zvětšení přesnosti jsem měřil vždy deset period kmitů. Měření periody jsem pro každé závaží provedl pětkrát.

Pro každé měření deseti period jsem určil chybu měření podle rovnice:

$$\sigma_{10T} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (10T_i - \overline{10T})^2}{5 \cdot 4} + \sigma_P^2} \quad (9)$$

kde jsem chybu měřícího přístroje odhadl na  $\sigma_P = 0,02 \text{ s}$ . Chyba měřícího přístroje byla vždy značně větší než chyba v důsledku náhodných odchylek, takže chybu jedné periody můžu určit jako

$$\sigma_T = \frac{\sigma_P}{10} \quad (10)$$

Změřené hodnoty period a vypočítané průměry pro jednotlivé pružiny jsou uvedeny v tabulkách 4 až 8. Grafickou závislost  $T = f(2\pi\sqrt{m})$  ukazuje graf 2.

Změřenými hodnotami byla opět proložena lineární závislost a parametr lineární regrese  $B$  vypočítán podle (6) s chybou podle (7). Tuhost pružiny lze poté určit na základě rovnice (4) jako  $\frac{1}{B^2}$  a chybu ze

zákona šíření chyb

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{8\pi^2 m_i}{T_i} \sigma_T \right)^2} \quad (11)$$

Výsledky dynamické metody shrnuje tabulka 9.

Tabulka 4: Dynamická metoda, pružina 1

$\frac{m}{g}$	$\frac{10T_1}{s}$	$\frac{10T_2}{s}$	$\frac{10T_3}{s}$	$\frac{10T_4}{s}$	$\frac{10T_5}{s}$	$\frac{\bar{T}}{s}$	$\frac{\sigma_T}{s}$
10	3,76	3,76	3,76	3,76	3,80	0,377	0,002
20	5,14	5,12	5,12	5,12	5,12	0,512	0,002
30	6,20	6,16	6,16	6,16	6,16	0,617	0,002
50	7,76	7,88	7,88	7,88	7,88	0,786	0,002
80	9,88	9,84	9,84	9,88	9,84	0,986	0,002
100	10,96	10,96	10,96	10,96	11,00	1,097	0,002

Tabulka 5: Dynamická metoda, pružina 2

$\frac{m}{g}$	$\frac{10T_1}{s}$	$\frac{10T_2}{s}$	$\frac{10T_3}{s}$	$\frac{10T_4}{s}$	$\frac{10T_5}{s}$	$\frac{\bar{T}}{s}$	$\frac{\sigma_T}{s}$
50	2,64	2,60	2,64	2,60	2,60	0,262	0,002
80	3,28	3,32	3,28	3,32	3,28	0,330	0,002
100	3,64	3,68	3,68	3,68	3,68	0,367	0,002
150	4,48	4,48	4,48	4,48	4,48	0,448	0,002
200	5,16	5,16	5,20	5,16	5,16	0,517	0,002
300	6,32	6,28	6,32	6,32	6,32	0,631	0,002

Tabulka 6: Dynamická metoda, pružina 3

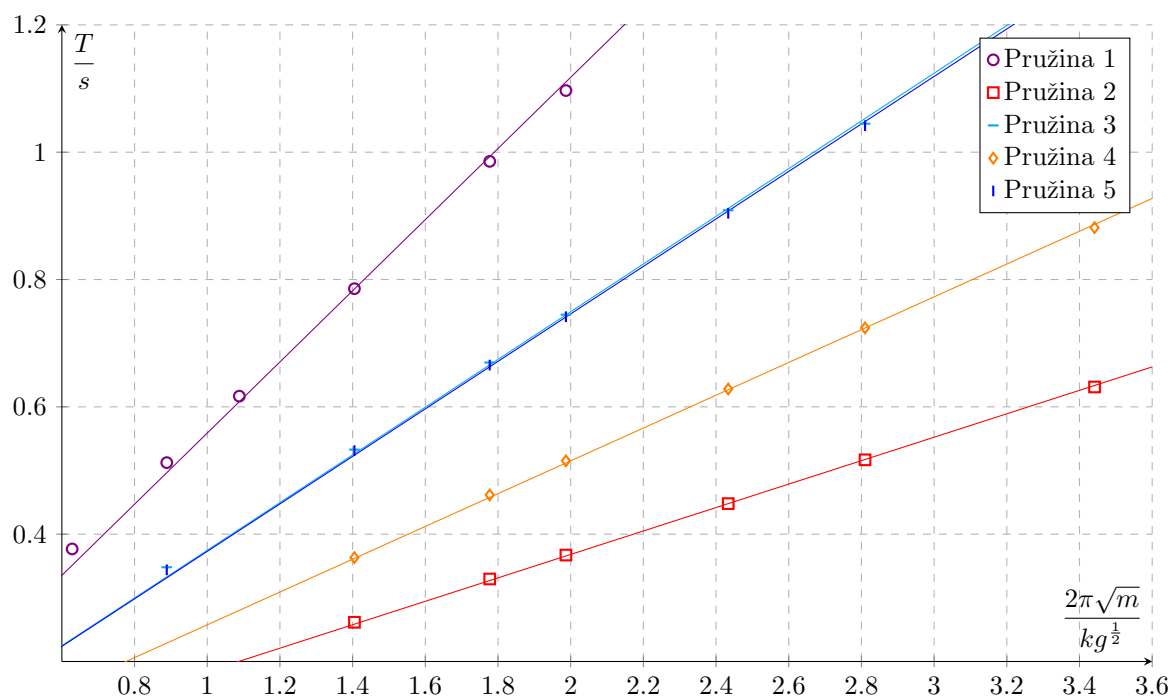
$\frac{m}{g}$	$\frac{10T_1}{s}$	$\frac{10T_2}{s}$	$\frac{10T_3}{s}$	$\frac{10T_4}{s}$	$\frac{10T_5}{s}$	$\frac{\bar{T}}{s}$	$\frac{\sigma_T}{s}$
20	3,48	3,48	3,48	3,48	3,48	0,348	0,002
50	5,32	5,32	5,36	5,32	5,32	0,533	0,002
80	6,68	6,72	6,68	6,72	6,68	0,670	0,002
100	7,44	7,44	7,48	7,44	7,44	0,745	0,002
150	9,12	9,08	9,08	9,08	9,08	0,909	0,002
200	10,44	10,44	10,44	10,44	10,48	1,045	0,002

Tabulka 7: Dynamická metoda, pružina 4

$\frac{m}{g}$	$\frac{10T_1}{s}$	$\frac{10T_2}{s}$	$\frac{10T_3}{s}$	$\frac{10T_4}{s}$	$\frac{10T_5}{s}$	$\frac{\bar{T}}{s}$	$\frac{\sigma_T}{s}$
50	3,64	3,64	3,64	3,60	3,64	0,363	0,002
80	4,64	4,60	4,60	4,60	4,64	0,462	0,002
100	5,16	5,16	5,12	5,16	5,16	0,515	0,002
150	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	0,628	0,002
200	7,24	7,24	7,24	7,24	7,24	0,724	0,002
300	8,84	8,80	8,80	8,80	8,84	0,882	0,002

Tabulka 8: Dynamická metoda, pružina 5

$\frac{m}{g}$	$\frac{10T_1}{s}$	$\frac{10T_2}{s}$	$\frac{10T_3}{s}$	$\frac{10T_4}{s}$	$\frac{10T_5}{s}$	$\frac{\bar{T}}{s}$	$\frac{\sigma_T}{s}$
20	3,44	3,44	3,44	3,44	3,44	0,344	0,002
50	5,32	5,32	5,28	5,32	5,32	0,531	0,002
80	6,64	6,68	6,64	6,64	6,68	0,666	0,002
100	7,40	7,40	7,44	7,40	7,44	0,742	0,002
150	9,04	9,00	9,08	9,04	9,04	0,904	0,002
200	10,40	10,44	10,44	10,40	10,40	1,042	0,002

Graf 2: Závislost periody kmitů na  $2\pi\sqrt{m}$

Tabulka 9: Výsledky dynamické metody

	Parametr lineární regrese	Tuhost pružiny	Relativní chyba
Pružina 1	$B = (558,8 \pm 4,6) 10^{-3} s \cdot kg^{-\frac{1}{2}}$	$k = (3,20 \pm 0,02) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 1\%$
Pružina 2	$B = (184,1 \pm 0,4) 10^{-3} s \cdot kg^{-\frac{1}{2}}$	$k = (29,5 \pm 0,3) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 1\%$
Pružina 3	$B = (374,4 \pm 1,7) 10^{-3} s \cdot kg^{-\frac{1}{2}}$	$k = (7,12 \pm 0,05) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 1\%$
Pružina 4	$B = (257,6 \pm 0,6) 10^{-3} s \cdot kg^{-\frac{1}{2}}$	$k = (15,1 \pm 0,1) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 1\%$
Pružina 5	$B = (373,0 \pm 1,5) 10^{-3} s \cdot kg^{-\frac{1}{2}}$	$k = (7,19 \pm 0,05) kg \cdot s^{-2}$	$\eta_k = 1\%$

### 3.3 Tíhové zrychlení

Pro každé měření prodloužení pružiny  $y_0$  a periody kmitů  $T$  lze určit tíhové zrychlení dle rovnice (5). Vypočítané hodnoty jsou uvedeny v tabulce 10.

Nejpravděpodobnější hodnotu tíhového zrychlení lze určit jako průměr uvedených hodnot a chybu měření určit ze zákona šíření chyb podle

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{8\pi^2 y_{0i}}{T_i^3} \right)^2 \sigma_T^2 + \left( \frac{4\pi^2}{T_i^2} \right)^2 \sigma_{y_0}^2 \right)} \quad (12)$$

Po vyčíslení přesahovaly první dvě měření u pružiny 1 mezní chybu  $3\sigma_g$ , a tak byly z výpočtu vyloučeny. Tíhové zrychlení je pak rovno  $g = (9,7 \pm 0,2) m \cdot s^{-2}$ .

Tabulka 10: Tíhová zrychlení určená z jednotlivých měření

	Pružina 1	Pružina 2	Pružina 3	Pružina 4	Pružina 5
Číslo měření	$\frac{g}{ms^{-2}}$	$\frac{g}{ms^{-2}}$	$\frac{g}{ms^{-2}}$	$\frac{g}{ms^{-2}}$	$\frac{g}{ms^{-2}}$
1	8,6	9,8	9,1	9,9	9,3
2	8,9	10,2	9,6	9,8	9,4
3	9,1	9,7	9,7	9,8	9,7
4	9,5	9,8	9,7	9,8	9,7
5	9,6	10,1	9,8	9,9	9,8
6	9,7	9,9	9,8	10,0	9,8

### 3.4 Závislost $\omega$ na $\sqrt{k/m}$

Ověření vztahu (2) bylo provedeno tak, že jsem určil tuhost pružiny statickou metodou a tu graficky porovnal s hodnotou určenou pomocí naměřené periody kmitů podle vztahu (3).

Graf 3 znázorňuje závislost  $\omega = f(\sqrt{k})$ . Změřenými hodnotami byla proložena lineární závislost a parametr lineární regrese vypočítán podle (6) s chybou  $\sigma_C$  určenou vztahem (7).

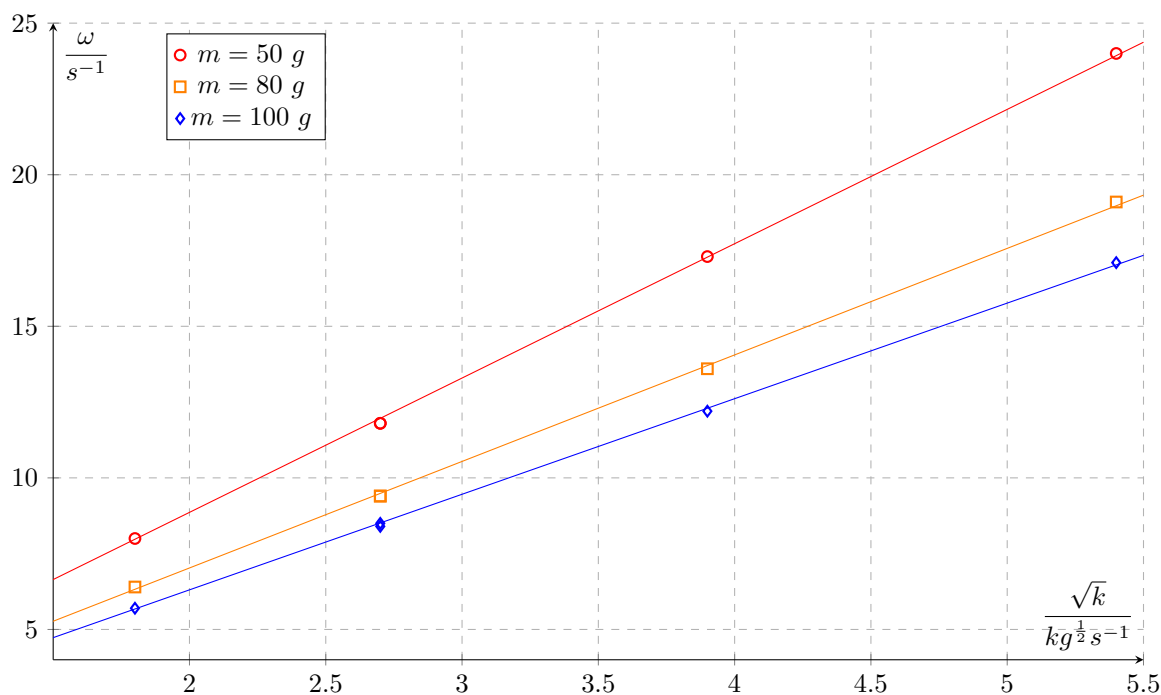
Z těchto hodnot poté bylo možné určit hmotnost, které daná závislost odpovídá, jako  $m = \frac{1}{C^2}$  a ze zákona šíření chyb určit i nejistotu výsledku:

$$\sigma_m = \frac{2}{C^3} \sigma_C \quad (13)$$

Výsledky shrnuje tabulka 11.

Tabulka 11: Výsledky zpracování grafické závislosti  $\omega = f(\sqrt{k})$

Použité závaží	Parametr lineární regrese	Dopočítaná hmotnost	Relativní chyba
$m = 50 \text{ g}$	$C = (4,431 \pm 0,016) \text{ kg}^{-\frac{1}{2}}$	$m = (50,9 \pm 0,4) \text{ g}$	$\eta_m = 0,7\%$
$m = 80 \text{ g}$	$C = (3,514 \pm 0,007) \text{ kg}^{-\frac{1}{2}}$	$m = (81,0 \pm 0,3) \text{ g}$	$\eta_m = 0,4\%$
$m = 100 \text{ g}$	$C = (3,153 \pm 0,006) \text{ kg}^{-\frac{1}{2}}$	$m = (100,6 \pm 0,4) \text{ g}$	$\eta_m = 0,4\%$



Graf 3: Graf závislosti  $\omega = f(\sqrt{k})$

Graf 4 znázorňuje závislost  $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$ . Změřenými hodnotami byla opět proložena lineární závislost a parametr lineární regrese  $D$  určen podle vztahu (6), jeho chyba  $\sigma_D$  podle (7).

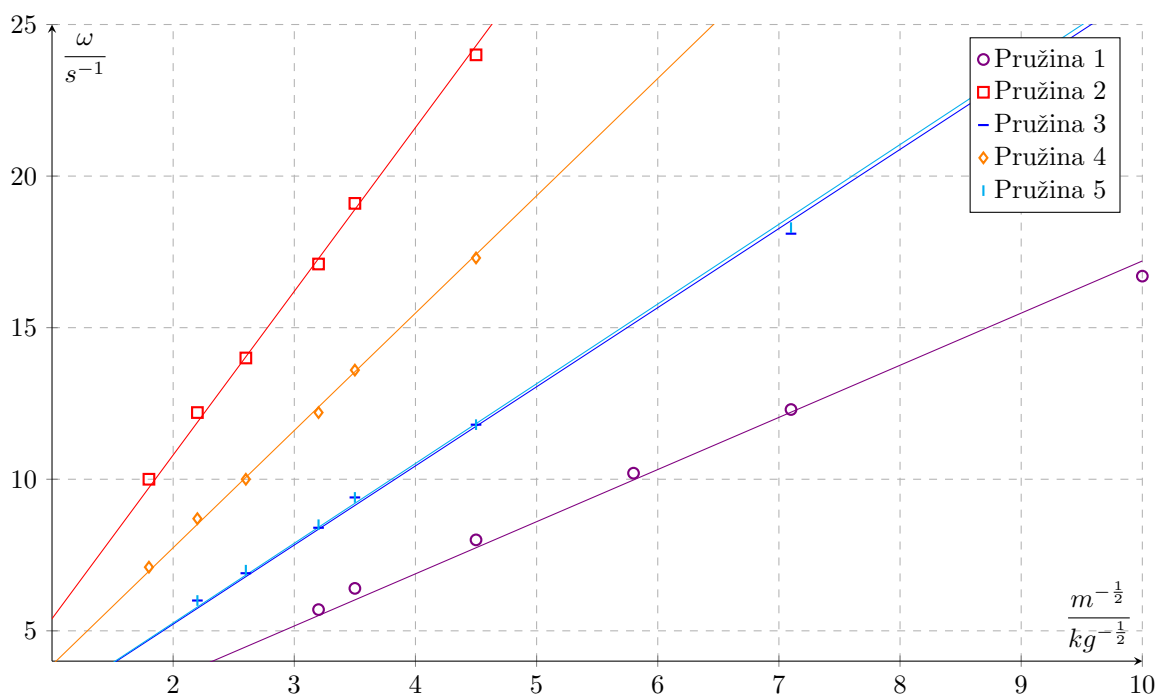
Z těchto hodnot bylo možné určit tuhost pružiny, které daná závislost odpovídá, jako  $k = D^2$  a ze zákona šíření chyb určit nejistotu výsledku podle

$$\sigma_k = 2D\sigma_D$$

Výsledky shrnuje tabulka 12.

Tabulka 12: Výsledky zpracování grafické závislosti  $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$

	Parametr lineární regrese	Dopočítaná tuhost pružiny	Relativní chyba
Pružina 1	$D = (1,72 \pm 0,02) \text{ kg}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$	$k = (2,96 \pm 0,08) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$\eta_k = 2,7\%$
Pružina 2	$D = (5,40 \pm 0,01) \text{ kg}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$	$k = (29,2 \pm 0,1) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$\eta_k = 0,4\%$
Pružina 3	$D = (2,61 \pm 0,02) \text{ kg}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$	$k = (6,8 \pm 0,1) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$\eta_k = 1,8\%$
Pružina 4	$D = (3,87 \pm 0,01) \text{ kg}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$	$k = (14,95 \pm 0,05) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$\eta_k = 0,3\%$
Pružina 5	$D = (2,63 \pm 0,02) \text{ kg}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$	$k = (6,9 \pm 0,1) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$\eta_k = 1,5\%$



Graf 4: Graf závislosti  $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$



## 4 Diskuse

Hodnoty tuhostí pružin, které jsem určil metodou statickou se shodují, v rámci chyby, s hodnotami určenými metodou dynamickou, kromě pružiny číslo 1. Předpokládám, že daný rozdíl byl způsoben hlavně během dynamické metody při měření krátkých period.

Měření při statické metodě byla zatížena především chybou metody. Otřesy podlahy a také fakt, že závaží nebylo vždy perfektně v klidu, znemožnilo odečítat přesné hodnoty z katetometru. Pro zlepšení přesnosti by bylo zapotřebí mít zcela pevný podstavec a také vždy počkat, až se závaží zcela zastaví. Měření by bylo pak potřeba provést vícrát v důsledku náhodných chyb. Já jsem každé měření při statické metodě provedl pouze jednou, protože chyba metody převyšovala jakékoli náhodné výchyly, a tak nemělo smysl měření provádět vícekrát. Hodnoty naměřené při statické metodě dobře odpovídají teoretické lineární závislosti  $y = mg/k$ .

U dynamické metody, kde jsem měřil periody kmitů, jsem předpokládal náhodné odchylky měřených hodnot, a tak jsem každé měření periody provedl pětkrát. Ukázalo se však, že větší vliv měla opět chyba metody, tedy vzorkovací frekvence čidla pohybu, které umožnilo snímat polohu pouze každé 0,04 s. Vzhledem k přesnosti měřícího přístroje tak nebylo potřeba měření opakovat pětkrát. Pro zlepšení přesnosti měření by bylo zapotřebí použít čidlo s větší vzorkovací frekvencí a měření pak opakovat vícekrát. Změřené hodnoty opět dobře odpovídají teoretické lineární závislosti  $T = 2\pi\sqrt{m}/\sqrt{k}$ .

Tuhosti pružin 3 a 5 zřejmě mají buď velmi blízké či totožné hodnoty, což poněkud znepřehlednilo grafy změřených hodnot, kde se často překrývají.

Ze všech naměřených hodnot jsem určil tíhové zrychlení na  $g = (9,7 \pm 0,2) m \cdot s^{-2}$ , což se v rámci chyby shoduje s tabelovanou hodnotou  $9,81 m \cdot s^{-2}$  [3]. Toto měření bych považoval za úspěšné.

Z grafické závislosti  $\omega = f(\sqrt{k})$  jsem zjistil, že skutečně dobře odpovídá teoretické lineární závislosti dané vztahem (2), ale výpočtem jsem zjistil, že dané lineární závislosti vždy odpovídají trochu větším hmotnostem než jsou hmotnosti použitých závaží. To bylo pravděpodobně způsobeno tím, že jsem ve výpočtech vždycky zanedbal hmotnost pružiny. Podobně naměřené závislosti  $\omega = f(1/\sqrt{m})$  jsou lineární, ale odpovídají odlišným tuhostem pružin, než jsem naměřil metodou statickou či dynamickou. Tato neshoda opět mohla být způsobena zanedbáním hmotnosti pružiny.

## 5 Závěr

Tuhosti pružin byly určeny dvěma metodami. Výsledky shrnuje tabulka 13, výsledky statické metody shrnuje podrobněji tabulka 3 a výsledky dynamické metody shrnuje podrobněji tabulka 9.

Tabulka 13: Výsledky statické a dynamické metody

	Statická metoda	Dynamická metoda
Pružina 1	$k = (3,33 \pm 0,06) kg \cdot s^{-2}$	$k = (3,20 \pm 0,02) kg \cdot s^{-2}$
Pružina 2	$k = (29,0 \pm 1,0) kg \cdot s^{-2}$	$k = (29,5 \pm 0,3) kg \cdot s^{-2}$
Pružina 3	$k = (7,2 \pm 0,1) kg \cdot s^{-2}$	$k = (7,12 \pm 0,05) kg \cdot s^{-2}$
Pružina 4	$k = (15,0 \pm 0,3) kg \cdot s^{-2}$	$k = (15,1 \pm 0,1) kg \cdot s^{-2}$
Pružina 5	$k = (7,3 \pm 0,1) kg \cdot s^{-2}$	$k = (7,19 \pm 0,05) kg \cdot s^{-2}$

Dále bylo z naměřených hodnot určeno tíhové zrychlení  $g = (9,7 \pm 0,2) m \cdot s^{-2}$  a vztah (2) byl ověřen grafy 3 a 4.

## 6 Seznam použité literatury

- [1] Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru. Fyzikální praktikum [online]. [cit. 2018-03-10]. [http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_102.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_102.pdf)
- [2] ENGLISH, Jiří. Úvod do praktické fyziky I. 1. vyd. Praha: MATFYYPRESS, 2006, 145 s. ISBN 80-86732-93-2.
- [3] Wolfram Alpha | Gravitational Fields. [online]. [cit. 2018-03-10]. Dostupné z: <http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=d34e8683df527e3555153d979bcda9cf>