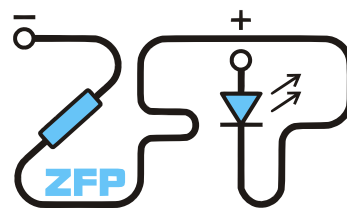


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I



Úloha č. II

Název úlohy: Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru

Jméno: Marco Souza de Joode

Datum měření: 4. 4. 2022

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

dne:

Pracovní úkol

- Změřte teplotní závislost povrchového napětí destilované vody σ v rozsahu teplot od 23°C do 70°C metodou bublin.
- Měřenou závislost znázorněte graficky, do grafu vynesete chybové úsečky a tabulkové hodnoty. Závislost aproximujte kvadratickou funkcí.

1 Teoretická část

Tato práce se zabývá studiem harmonických kmitů mechanického oscilátoru, jmenovitě pružin. Harmonický kmit vzniká působením pružné síly F , jejíž velikost je úměrná výchylce z rovnovážné polohy y [1] [2]:

$$F = -ky, \quad (1)$$

kde konstanta úměrnosti k je nazývána tuhostí pružiny. Tu lze určovat metodou statickou a dynamickou. Statická metoda využívá přímo rovnice 1, kde proti síle pružnosti působí tíhová síla na závaží hmotnosti m v místním tíhovém poli s velikostí tíhového zrychlení g :

$$k = \frac{mg}{y}, \quad (2)$$

přičemž výchylka z rovnovážné polohy y je měřena katetometrem. V grafu závislosti síly mg na výchylce y je tuhost pružiny směrnici přímkou tvořící závislost. Dynamická metoda určení tuhosti využívá vztahu pro úhlovou frekvenci kmitů ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3)$$

přičemž tuhost můžeme opět určovat regresně jako směrnici závislosti

$$\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right). \quad (4)$$

Naopak, závislost

$$\omega = f(\sqrt{k}) \quad (5)$$

by měla mít pro vybranou konstantní hmotnost m konstantní směrnici o hodnotě $\sqrt{\frac{1}{m}}$.

2 Výsledky a zpracování měření

Veškeré nejistoty uvedené níže jsou vztaheny k hladině pravděpodobnosti $P = 0,68$.

2.1 Laboratorní podmínky

Měření byla prováděna při laboratorní teplotě $t = (24 \pm 2)^\circ\text{C}$. Měření bylo provedeno při tlaku $p = 984\text{ hPa}$ a relativní vlhkosti 18%. Místní tíhové zrychlení bylo uvažováno jako $g = 9,813\text{ ms}^{-2}$ [3].

2.2 Měření tuhosti statickou metodou

Výchylky z rovnovážné polohy byly měřeny katetometrem, s velikostí nejmenšího dílku 0,1 mm díky vernierové stupnici. Raději uvažujeme nejistotu $\sigma_{B,y} = 1\text{ mm}$ s ohledem na oscilace pružin, vodorovnost katetometru apod.

Hmotnost závaží uvažujeme známou v rámci $\eta_m = 1\%$. Naměřené závislosti jsou vyneseny v grafu 1, přičemž směrnice pro jednotlivé pružiny označené písmeny A, B, C, D, E odpovídají tuhosti jednotlivých pružin.

Pro určení výchylky y byly změřeny dvě polohy, tj. klidová poloha a poloha po zatížení. V tabulce 1 jsou uvedeny pouze rozdíly, protože samotné lineární rozměry odečtené z katetometru nenesou žádnou informaci.

Lineární regresí byly určeny tuhosti, spolu s nejistotou směrnice. Ty jsou uvedeny v tabulce 2.

Je třeba započítat nejistotu měřicí sestavy η_B , kterou určíme jako

$$\eta_B^2 = \eta_m^2 + \eta_y^2, \quad (6)$$

kde za η_y uvažujeme střední relativní nejistotu prodloužení, tj. veličinu $\sigma_{B,y}$ vzaženou k střednímu prodloužení pružiny. Jedná se pouze o odhad této veličiny, protože pro každé dílčí měření nabývá různé hodnoty. Tyto nejistoty jsou také uvedeny v tabulce 2.

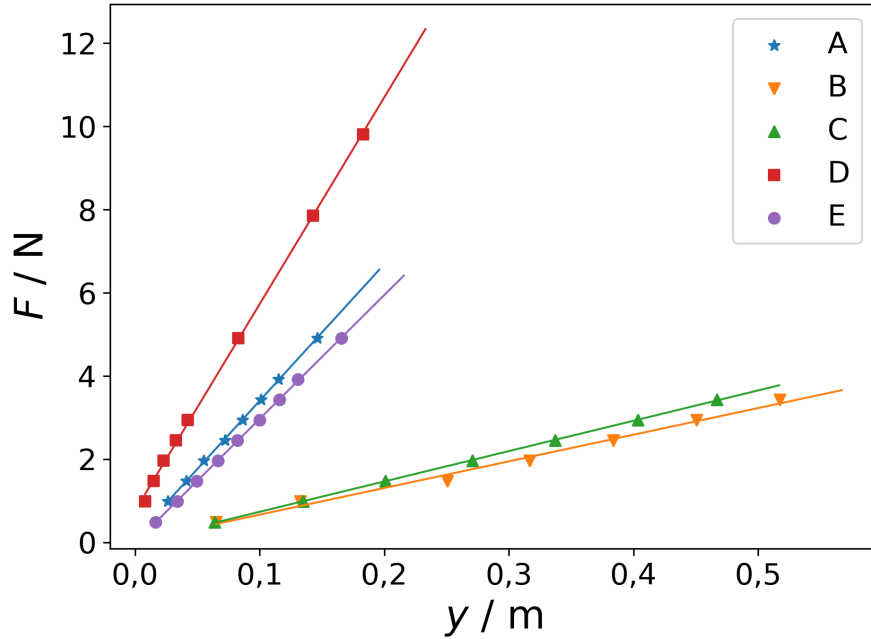
Výsledkem relativní nejistoty určujeme jako

$$\eta_k^2 = \eta_B^2 + \eta_r^2, \quad (7)$$

kde η_r je nejistota směrnice z lineární regrese.

Tabulka 1: Měření tuhosti pružin dynamickou a statickou metodou. Znakem k_s značím tuhost určenou statickou metodou a k_d značí určení z dynamické metody. Výsledné hodnoty k_s a k_d nejsou získány jako průměr těchto dílčích hodnot, ale lineární regresí. Tyto dílčí hodnoty jsou zde uvedeny pro názornější představu věrohodnosti jednotlivých dílčích měření.

A						
m/g	y/m	T/s	ω/ Hz	k_d/Nm^{-1}	k_s/Nm^{-1}	g/ms^{-2}
100	0,0261	0,368	17,1	29,2	37,6	7,6
200	0,0551	0,5	12,6	31,6	35,6	8,7
300	0,0862	0,604	10,4	32,5	34,2	9,3
400	0,1149	0,692	9,1	33,0	34,2	9,5
500	0,146	0,776	8,1	32,8	33,6	9,6
150	0,0411	0,432	14,5	31,7	35,8	8,7
250	0,0721	0,552	11,4	32,4	34,0	9,3
350	0,1008	0,652	9,6	32,5	34,1	9,4
B						
50	0,0651	0,532	11,8	7,0	7,5	9,1
100	0,1324	0,744	8,4	7,1	7,4	9,4
200	0,3166	1,04	6,0	7,3	6,2	11,6
300	0,4506	1,26	5,0	7,5	6,5	11,2
250	0,3837	1,156	5,4	7,4	6,4	11,3
150	0,2505	0,904	7,0	7,2	5,9	12,1
350	0,5172	1,36	4,6	7,5	6,6	11,0
C						
50	0,0637	0,744	8,4	3,6	7,7	4,5
100	0,1349	0,744	8,4	7,1	7,3	9,6
200	0,2707	1,052	6,0	7,1	7,3	9,7
300	0,4035	1,268	5,0	7,4	7,3	9,9
250	0,3371	1,164	5,4	7,3	7,3	9,8
150	0,2007	0,908	6,9	7,2	7,3	9,6
350	0,4669	1,364	4,6	7,4	7,4	9,9
D						
100	0,008	0,212	29,6	88	123	7,0
200	0,0227	0,368	17,1	58	86	6,6
300	0,0421	0,492	12,8	49	70	6,9
250	0,0327	0,436	14,4	52	75	6,8
150	0,0149	0,3	20,9	66	99	6,5
500	0,0826	0,64	9,8	48	59	8,0
800	0,1427	0,808	7,8	48	55	8,6
1000	0,183	0,9	7,0	49	54	8,9
E						
50	0,0164	0,24	26,2	34,3	29,9	11,2
100	0,0337	0,368	17,1	29,2	29,1	9,8
200	0,0666	0,52	12,1	29,2	29,5	9,7
300	0,0998	0,632	9,9	29,7	29,5	9,9
400	0,1306	0,728	8,6	29,8	30,1	9,7
500	0,1657	0,812	7,7	29,9	29,6	9,9
250	0,0821	0,58	10,8	29,3	29,9	9,6
150	0,0494	0,452	13,9	29,0	29,8	9,5
350	0,1157	0,684	9,2	29,5	29,7	9,8



Obrázek 1: Měření tuhosti statickou metodou pro pět pružin, regrese byla provedena afinní funkcí, viz diskuze.

2.3 Měření tuhosti dynamickou metodou

Pro každou pružinu a pro každé závaží, které bylo použito pro měření statickou metodou, bylo pořízeno také měření metodou dynamickou. Závaží byla udělena počáteční výchylka, a pomocí ultrazvukového čidla GoMotion byla měřena závislost výchylky na čase. Bylo změřeno vždy deset period, přičemž bylo nutno přenastavovat vzdálenost čidla od oscilátoru tak, aby se oscilátor pohyboval v oblasti nejvyšší citlivosti. Časové rozlišení čidla je $\sigma_T = 0,04\text{s}$. Nevyužíváme samotnou informaci o poloze, ale pouze okamžiky maximální nebo minimální vzdálenosti od čidla. Nejistota určení času se projevila na určení prvního maxima i desátého maxima, tj. dvakrát. Úhlová rychlost byla určena jako

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (8)$$

přičemž platí

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (9)$$

V grafu závislosti $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$ je směrnice lineární regrese tuhostí dané pružiny. Tyto závislosti jsou vyneseny v grafu 2, přičemž takto určené tuhosti jsou spolu s nejistotami regrese uvedeny v druhé polovině tabulky 2. Nejistota lineární regrese tvoří pouze malou část určení výsledné nejistoty tuhosti pružiny. Tu určíme jako

$$\eta_k^2 = \eta_r^2 + 2\eta_T^2 + \eta_m^2, \quad (10)$$

kde η_T je započteno dvakrát díky druhé mocnině úhlové rychlosti, a samotná η_T vychází z dvojnásobku časového rozlišení. Je však menší díky měření deseti period. Uvažujeme $\eta_m = 1\%$. Výsledné hodnoty tuhosti spolu s dílčími i výslednými nejistotami jsou uvedeny v tabulce 2.

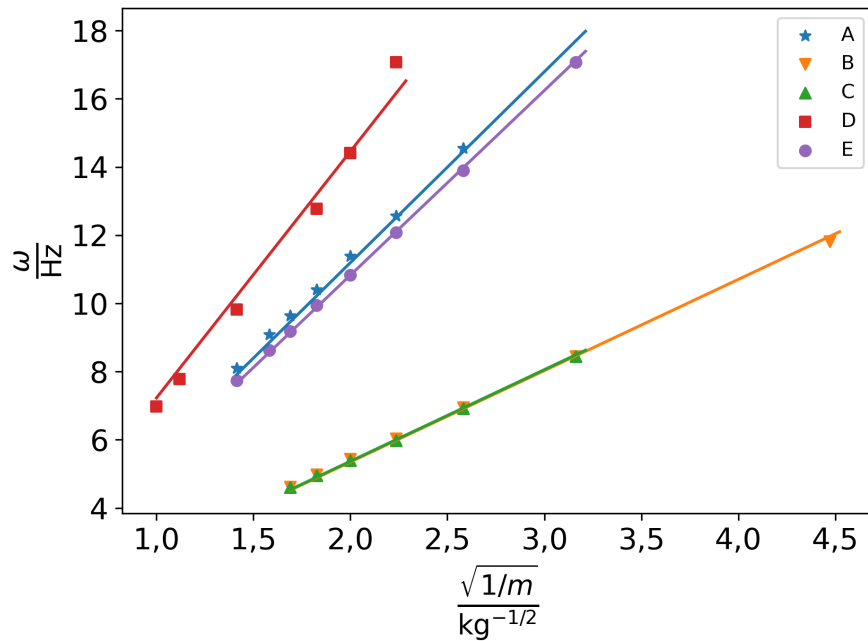
Také byl vykreslen graf závislosti $\omega = f(\sqrt{k})$, viz 3. Byl vykreslen pro 5 hodnot hmotnosti závaží, které byly použity pro všechny pružiny. Tedy, pro každou pružinu bylo pořízeno statické i dynamické měření s velkou sadou závaží, přičemž průnik tvořila závaží o hmotnostech 100 g, 150 g, 200 g, 250 g a 300 g. Takto velký průnik byl zajištěn záměrně. Dále byly do grafu vyneseny teoretické závislosti se směrnici $\sqrt{\frac{1}{m}}$.

2.4 Určení tíhového zrychlení

Tíhové zrychlení bylo určeno jako

$$g = \omega^2 y, \quad (11)$$

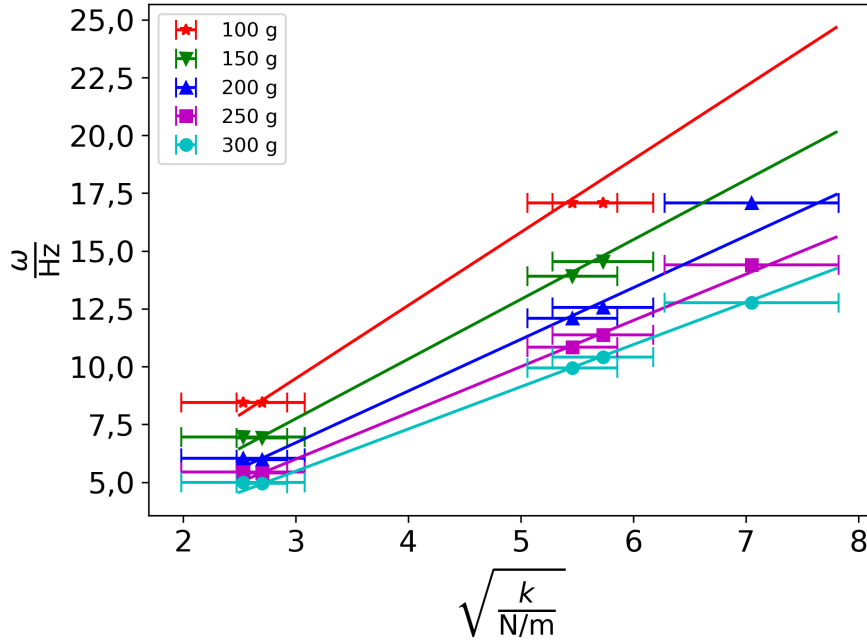
přičemž tato veličina již nebyla zjišťována regresně ale přímým výpočtem pro každé dílčí měření, s čímž výslednou hodnotu uvažujeme jako aritmetický průměr dílčích hodnot, jak jsou uvedeny v tab. 1 po vyřazení bodů mimo interval 3σ . Nejistotu čerpáme z nejistoty statistické a nejistoty měřících přístrojů. Statistickou nejistotu bereme



Obrázek 2: Závislost $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$ pro sadu pružin. Regrese byla provedena tak, aby přímky procházely počátkem.

Tabulka 2: Výsledky lineárních regresí pro dynamickou a statickou metodu, spolu s relativní nejistotou lineární regrese η_r v procentech. η_B značí nejistotu metody, která je vypočtena odlišnými postupy pro dynamickou a statickou metodu. σ_k značí směrodatnou odchylku tuhosti.

statická metoda				
	k/Nm^{-1}	$\eta_r / \%$	$\eta_B / \%$	σ_k/Nm^{-1}
A	32,8	0,7	2	0,7
B	6,4	4,2	1	0,3
C	7,3	0,7	1	0,1
D	49	1,1	6	3,0
E	29,8	0,6	2	0,6
dynamická metoda				
A	31,3	0,07	3	0,9
B	7,2	1	2	0,6
C	7,2	4,44	2	0,3
D	52,3	1,99	4	3
E	29,3	0,18	3	0,9



Obrázek 3: Graf závislosti $\omega = f(\sqrt{k})$, přičemž plné čáry znázorňují teoretické závislosti, tedy nejedná se o regresně určené přímky.

jako směrodatnou odchylku průměru se Studentovým koeficientem pro 48 měření $t_s \approx 1$. Příspěvek statistické nejistoty k celkové relativní nejistotě značíme η_A . Nejistotu měřícího přístroje η_B bereme jako

$$\eta_B^2 = \eta_m^2 + 2\eta_T^2 \quad (12)$$

kde uvažujeme $\eta_m = 1\%$. Výsledná hodnota tíhového zrychlení byla určena jako

$$g = (9,6 \pm 0,8) \text{ ms}^{-2}. \quad (13)$$

3 Diskuze výsledků

Regrese afinní vs. regrese lineární funkcí. Graf závislosti $F = F(y)$, vynesené v grafu 1 byl proložen afinní funkcí, tj. funkcí ve tvaru $F(y) = ay + b$. Přidání konstantního členu by se mohlo zdát neodpovídající, protože zřejmě při nulové výchylce pružina nepůsobí žádnou silou. Kdybychom ovšem proložili body lineární funkcí, tj. funkcí ve tvaru $F(y) = ay$, implicitně bychom tím předpokládali dokonalé určení nulové výchylky. Vzhledem k povaze měření katetometrem však neznáme počáteční, tj. klidovou polohu pružiny o nic přesněji, než polohy vychýlené pružiny. Regresi afinní funkcí připouštíme volnost v tomto bodě, což nám umožňuje přesněji určit směrnici.

Naopak, graf závislosti $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$, vynesené v grafu 2, byl proložen čistou lineární funkcí, tj. s nulovým posuvem ve vertikálním směru. Tím říkáme, že při nekonečné hmotnosti závaží očekáváme nulovou úhlovou rychlost. V limitním případě je toto skutečně pravda i pro náš experiment. Tedy, nehrozí nějaký systematický posuv, který by způsobil, že pro limitně se zvyšující závaží bychom mohli naměřit jinou než nulovou frekvenci. Tato úvaha naopak pomáhá odstranit nechtěnou volnost regrese, tzv. overfitting, kdy přidáním zbytečného stupně volnosti vzdálíme model od fyzikální reality.

Srovnání dynamické a statické metody. Hodnoty tuhostí pružin určené oběma metodami jsou v rámci dobré korespondenci, tedy, hodnoty určené oběma metodami mají určitý překryv intervalů o šířce 1σ , viz tab. 2. Měření oběma metodami bylo skutečně nezávislé. Jediným společným parametrem byla použitá závaží. Pokud by ta byla systematicky nesprávná, mohlo by dojít k současným chybám v obou metodách, které by nebyly odhaleny. Toto ovšem neočekáváme a lze se tomu snadno vyvarovat, např. převážením na kalibrovaných vahách.

Pro takto dobrou shodu bylo třeba vyřadit několik bodů, zejména velmi lehkých závaží na nejtěžších pružinách. Ta kmitala s velkou frekvencí, která začínala znepřesňovat určení frekvence v dynamické metodě a vnášela velké relativní chyby do metody statické, díky malé výchylce z rovnovážné polohy.

Ověření. Byl vykreslen ověřovací graf, viz 3, kde je vynesena závislost $\omega = f(\sqrt{k})$ spolu s teoreticky určenými přímkami. V rámci nejistot určení k změřené body teoretické závislosti odpovídají.

Určení tíhového zrychlení. Tíhové zrychlení nebylo určováno lineární regresí, protože to není opodstatněné. Výsledek $g = (9,6 \pm 0,8) \text{ ms}^{-2}$ je zatížen velkou chybou, ale samotná střední hodnota je až překvapivě blízko tabelovaným hodnotám [2], [3]. Bylo ovšem třeba vyřadit nejméně přesná měření, která pro malé hmotnosti závaží dávala problematické hodnoty, viz tab. 1.

4 Závěr

Tuhosti pružin byly určeny statickou metodou: pro pružinu A $k = (32,8 \pm 0,7) \text{ Nm}^{-1}$, pro pružinu B $k = (6,4 \pm 0,3) \text{ Nm}^{-1}$, pro pružinu C $k = (7,3 \pm 0,1) \text{ Nm}^{-1}$, pro pružinu D $k = (49 \pm 3) \text{ Nm}^{-1}$ a pro pružinu E $k = (29,8 \pm 0,6) \text{ Nm}^{-1}$.

Tuhosti pružin byly určeny dynamickou metodou: pro pružinu A $k = (31,3 \pm 0,9) \text{ Nm}^{-1}$, pro pružinu B $k = (7,2 \pm 0,1) \text{ Nm}^{-1}$, pro pružinu C $k = (7,2 \pm 0,3) \text{ Nm}^{-1}$, pro pružinu D $k = (52 \pm 3) \text{ Nm}^{-1}$ a pro pružinu E $k = (29,3 \pm 0,9) \text{ Nm}^{-1}$. Byly vyneseny závislosti $\omega = f(\sqrt{k})$ a $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$. Výsledná hodnota tíhového zrychlení byla určena jako $g = (9,6 \pm 0,8) \text{ ms}^{-2}$.

Literatura

- [1] Studijní text k praktiku: Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru [online]. 2022 [cit. 2022-04-05]. Dostupné z: <https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/102>
- [2] BROŽ, Jaromír. Základy fyzikálních měření I. Ilustroval Jan VOLEJNÍK. Praha: SPN, 1967.
- [3] ČERNOCH, Svatopluk. Strojně technická příručka. 11. vydání. Praha 2: SNTL, 1959.