

1 Pracovní úkoly

1. Změřte tuhost k pěti pružin metodou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle $y = i(F)$
3. Změřte tuhost k pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g .
5. Sestrojte grafy závislostí :
 - a. $\omega = f(\sqrt{k})$
 - b. $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$
6. Při zpracování použijte lineární regresi.

2 Teoretický úvod

Pružina působí silou F přímo úměrnou její aktuální výchylce y z rovnovážné polohy ve směru opačném k výchylce.

$$F = -ky, \quad (1)$$

kde k je tuhost pružiny ($k > 0$). Pro sílu, podle 2. Newtonova zákona, platí

$$F = ma = m\ddot{y}. \quad (2)$$

Pokud dáme rovnice (1) a (2) do rovnosti a vyřešíme diferenciální rovnici, pak dojdeme k řešení

$$y = y_m \sin \omega t + \varphi, \quad (3)$$

kde y_m je amplituda výchylky, ω je úhlová frekvence a φ je počáteční fáze. Pro úhlovou frekvenci platí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4)$$

Vztah mezi dobou kmitu T a úhlovou frekvencí je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5)$$

Zavěsíme-li na pružinu těleso hmotnosti m a necháme-li kmity ustálit, pak pro tíhovou sílu $F_G = mg$ a sílu pružnosti $F_p = -k\Delta y$ platí

$$F_p + F_G = 0. \quad (6)$$

Rovnovážná poloha se posune o Δy níže. Z toho můžeme určit tuhost pružiny pomocí statické metody, kde pro tuhost k platí

$$k = \frac{mg}{\Delta y}. \quad (7)$$

Tuhost můžeme určit také pomocí dynamické metody úpravou rovnice (5)

$$k = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (8)$$

Pokud pro stejnou pružinu a stejné hodnoty m změříme jak kmity, tak prodloužení pružiny, pak můžeme vypočítat tíhové zrychlení jako

$$g = \Delta y \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (9)$$

Pružina 1			Pružina 2			Pružina 3		
$\frac{m}{g}$	$\frac{h}{cm}$	$\frac{y_0}{cm}$	$\frac{m}{g}$	$\frac{h}{cm}$	$\frac{y_0}{cm}$	$\frac{m}{g}$	$\frac{h}{cm}$	$\frac{y_0}{cm}$
0	59,9	0,0	0	56,4	0,0	0	57,3	0,0
10	57,5	2,4	100	54,3	2,1	10	55,8	1,5
20	55,1	4,8	200	52,1	4,3	20	54,2	3,1
30	52,7	7,2	300	50,0	6,4	30	52,7	4,6
40	50,4	9,5	400	47,8	8,6	40	51,0	6,3
50	47,9	12,0	500	45,7	10,7	50	49,5	7,8
60	45,6	14,3	600	43,6	12,8	60	48,0	9,3
70	43,3	16,6	700	41,6	14,8	70	46,4	10,9
80	41,0	18,9	800	39,5	16,9	80	44,7	12,6
90	38,6	21,3	900	37,4	19,0	90	43,1	14,2
100	36,3	23,6	50	55,4	1,0	100	41,6	15,7
150	25,2	34,7	150	53,3	3,1	150	34,0	23,3
			80	54,8	1,6			

Pružina 4			Pružina 5		
$\frac{m}{g}$	$\frac{h}{cm}$	$\frac{y_0}{cm}$	$\frac{m}{g}$	$\frac{h}{cm}$	$\frac{y_0}{cm}$
0	53,5	0,0	0	52,0	0,0
10	52,1	1,4	50	49,5	2,5
20	50,7	2,8	100	47,0	5,0
30	49,3	4,2	150	44,4	7,6
40	48,0	5,5	200	41,8	10,2
50	46,6	6,9	250	39,2	12,8
60	45,2	8,3	300	36,8	15,2
70	43,9	9,6	350	34,2	17,8
80	42,5	11,0	400	31,8	20,2
90	41,0	12,5	450	29,1	22,9
100	39,8	13,7	500	26,6	25,4
150	33,1	20,4	80	48,1	3,9

Tabulka 1: Naměřené prodloužení pružiny v závislosti na hmotnosti závaží

3 Měření

Měření bylo provedeno na 5 pružinách, které jsou očíslovány 1 - 5.

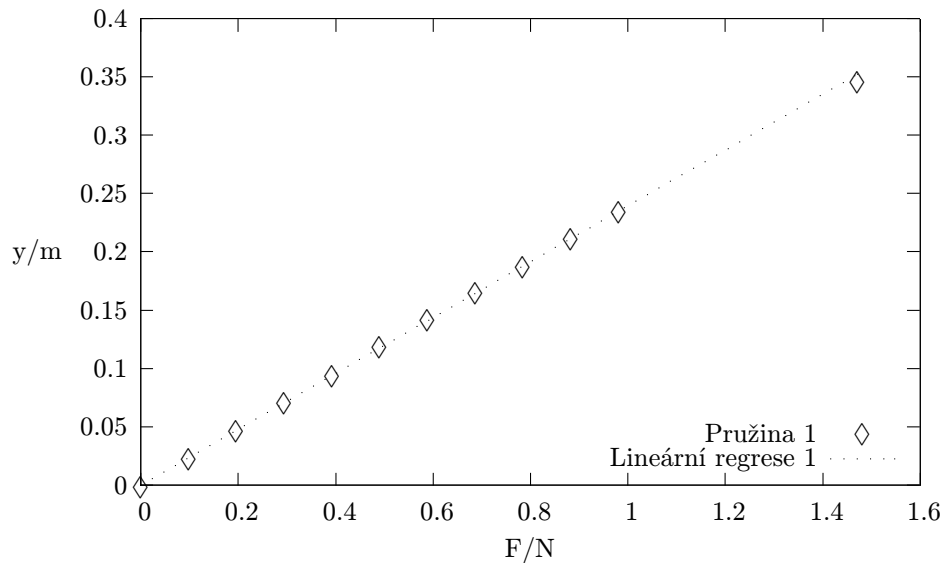
3.1 Statická metoda

Měření statickou metodou bylo prováděno tak, že bylo na pružinu zavěšováno závaží o různé hmotnosti a poloha jejího spodního konce byla měřena pomocí katetometru. Hodnoty, které byly na katetometru odečítány jsou vlastně výškou nad pracovním stolem h a jsou uvedeny v Tabulce č. 1. Hodnoty prodloužení byly pak určeny vůči počáteční poloze dolního konce pružiny. Závaží byla volena tak, aby byla prodloužení dostatečně rozdílná, ale tak abychom se pohybovali ještě v oblasti, kde je chování pružiny lineární.

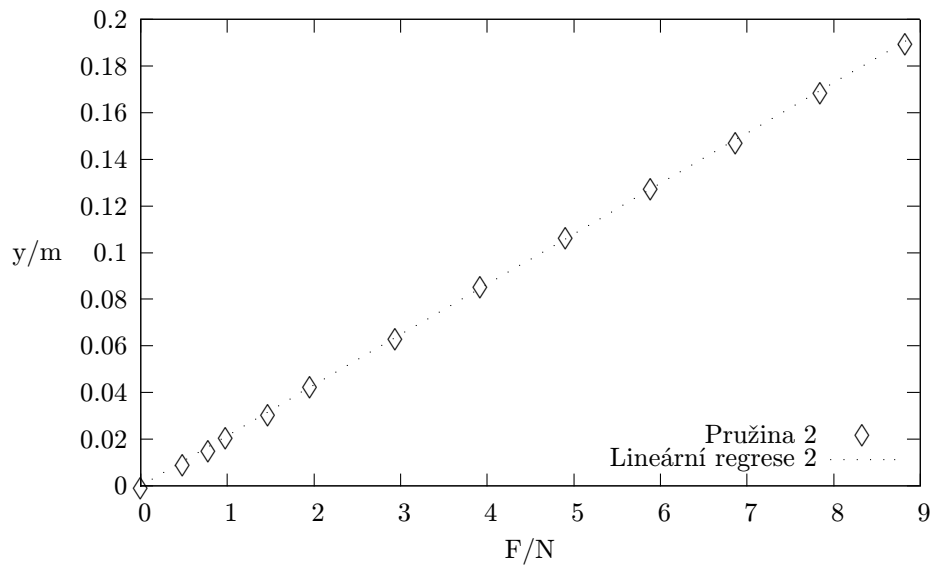
Prodloužení pružin v závislosti na použitém závaží je vyneseno v grafech (obrázky č. 1, 2, 3, 4 a 5) společně s jejich proloženími lineárními funkcemi.

Vzhledem k tomu, že chyba měření způsobená určená ze statistického zpracování je nízká, můžeme tedy brát chybu k určenou vzorcem (statistická chyba je o řád menší)

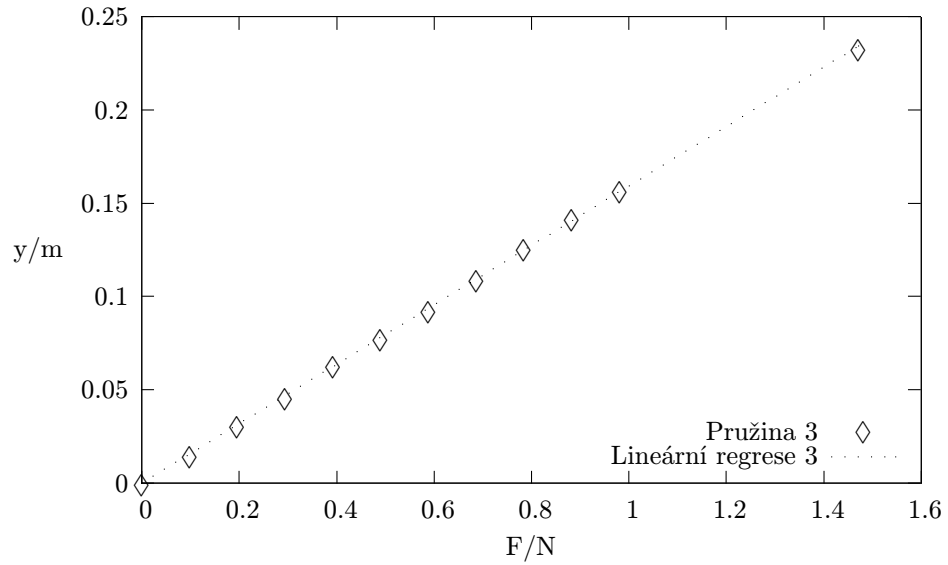
$$s_k = g \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{s_m}{\Delta y_i} \right)^2 + \left(\frac{m_i s_{\Delta y}}{\Delta y_i^2} \right)^2 \right)}, \quad (10)$$



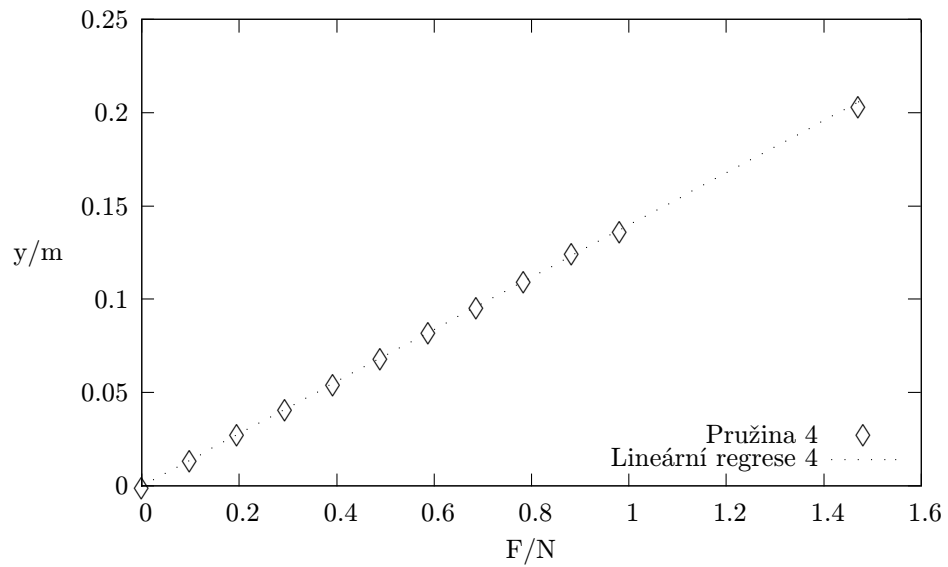
Obrázek 1: Graf závislosti prodloužení pružiny 1 na působící síle



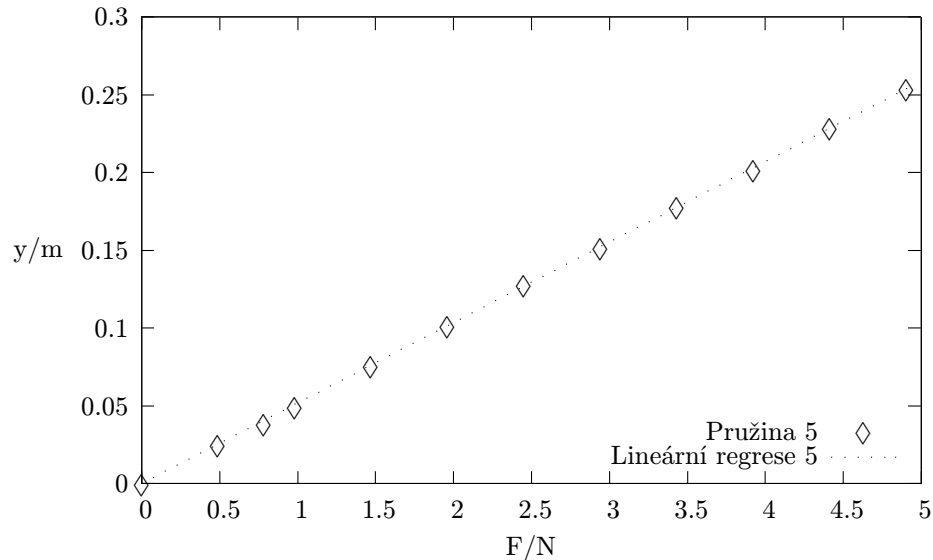
Obrázek 2: Graf závislosti prodloužení pružiny 2 na působící síle



Obrázek 3: Graf závislosti prodloužení pružiny 3 na působící síle



Obrázek 4: Graf závislosti prodloužení pružiny 4 na působící síle



Obrázek 5: Graf závislosti prodloužení pružiny 5 na působící síle

Pružina č.	$k/\text{kg s}^{-2}$	$s_k/\text{kg s}^{-2}$	η
1	4,2	0,17	4,1%
2	46,3	2,02	4,4%
3	6,3	0,31	4,9%
4	7,2	0,34	4,8%
5	19,3	0,39	2,0%

Tabulka 2: Tuhosti pružin zjištěné statickou metodou

kde s_m je odhadnutá chyba hmotnosti závaží, Δy_i naměřené prodloužení pružiny v i -tém měření, je $s_{\Delta y}$ je chyba naměřeného prodloužení, g je tíhové zrychlení, které zde beru jako $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ [1] a n je počet měření. Kvůli otřesům v místnosti nemělo smysl odečítat desetiny milimetru na katetometru, přestože na něm je noniová stupnice. S přesností závaží si nejsem zcela jist, ale chyby podobných sad závaží se pohybují kolem 1 g. Odhady chyb jsou tedy $s_m = 1 \text{ g}$ a $s_{\Delta y} = 1 \text{ mm}$.

3.2 Dynamická metoda

Dynamická metoda určení tuhosti pružiny je založena na měření doby kmitu pružina, na které je zavěšeno závaží o známé hmotnosti.

U dynamické metody jsem pro každé měřené závaží provedl tři měření doby 10 kmitů, abych omezil možnost hrubé chyby měření. Naměřené hodnoty ($10 T_1, 10 T_2, 10 T_3$) a jejich střední hodnoty ($10 T$) jsou uvedeny v Tabulce č. 3.

Měření doby kmitu bylo prováděno stopkami, takže nepřesnost měření je určena zejména reakční dobou. Střední chybu reakční doby odhaduji jako $s_{10T} = 0,2 \text{ s}$, takže vzhledem k tomu, že jsem provedl měření vždy po 10 kmitech, tak pro střední dobu jednoho kmitu platí $s_T = 0,02 \text{ s}$. Chybu měření jsem také počítal metodou přenosu chyb následujícím vzorcem

$$s_k = 4\pi^2 \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{s_m}{T_i^2} \right)^2 + \left(\frac{2m_i s_T}{T_i^3} \right)^2 \right)} \quad (11)$$

, kde s_m beru stejně jako u statické metody 1 g.

Pružina 1				
m/g	$10 T_1/s$	$10 T_2/s$	$10 T_3/s$	$10 T/s$
30	4,91	4,97	4,90	4,93
40	5,64	5,68	5,62	5,65
50	6,36	6,26	6,44	6,35
60	6,91	6,79	6,74	6,81
70	7,36	7,32	7,36	7,35
80	7,68	7,86	7,91	7,82
90	8,27	8,29	8,33	8,30
100	8,61	8,61	8,76	8,66
150	10,71	10,55	10,59	10,62

Pružina 2				
m/g	$10 T_1/s$	$10 T_2/s$	$10 T_3/s$	$10 T/s$
80	2,38	2,24	2,40	2,34
100	2,66	2,60	2,72	2,66
150	3,15	3,19	3,10	3,15
400	5,18	5,31	5,21	5,23
500	5,71	5,79	5,85	5,78
600	6,40	6,29	6,24	6,31
700	6,82	6,71	6,75	6,76
800	7,07	7,08	7,14	7,10
900	7,61	7,55	7,48	7,55

Pružina 3				
m/g	$10 T_1/s$	$10 T_2/s$	$10 T_3/s$	$10 T/s$
40	4,63	4,46	4,58	4,56
50	5,08	5,16	5,12	5,12
60	5,52	5,59	5,44	5,52
70	5,91	6,04	5,95	5,97
80	6,42	6,38	6,32	6,37
90	6,75	6,72	6,74	6,74
100	7,15	7,10	7,07	7,11
150	8,72	8,80	8,82	8,78

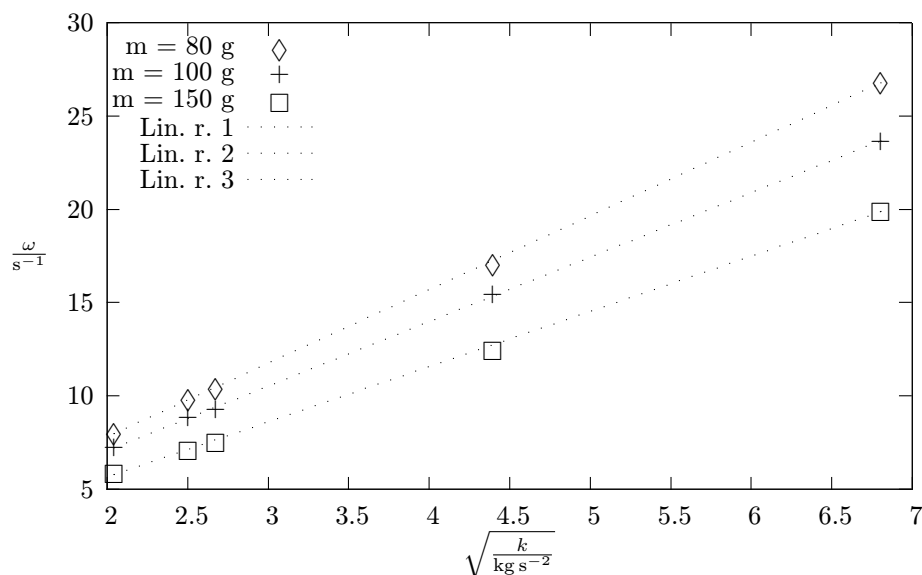
Pružina 4				
m/g	$10 T_1/s$	$10 T_2/s$	$10 T_3/s$	$10 T/s$
30	3,67	3,75	3,91	3,78
40	4,19	4,37	4,32	4,29
50	4,79	4,86	4,78	4,81
60	5,29	5,28	5,28	5,28
70	5,65	5,63	5,65	5,64
80	6,04	6,01	5,99	6,01
90	6,38	6,38	6,41	6,39
100	6,74	6,89	6,73	6,79
150	8,19	8,36	8,28	8,28

Pružina 5				
m/g	$10 T_1/s$	$10 T_2/s$	$10 T_3/s$	$10 T/s$
80	3,70	3,67	3,66	3,68
100	3,99	4,13	4,06	4,06
150	5,01	4,98	5,03	5,01
200	5,76	5,83	5,66	5,75
250	6,50	6,45	6,38	6,44
300	7,13	7,04	6,96	7,04
350	7,72	7,66	7,58	7,65
400	8,27	8,12	8,13	8,17
450	8,61	8,65	8,61	8,62
500	9,05	9,09	9,14	9,09

Tabulka 3: Naměřené doby 10 kmitů v závislosti na hmotnosti závaží

Pružina č.	$k/\text{kg s}^{-2}$	$s_k/\text{kg s}^{-2}$	η
1	4,5	0,3	7,1%
2	55,4	6,3	11,3%
3	7,4	0,6	7,7%
4	8,1	0,7	8,7%
5	23,4	1,8	7,5%

Tabulka 4: Tuhosti pružin zjištěné dynamickou metodou

Obrázek 6: Graf závislosti $\omega = f(\sqrt{k})$

V Tabulce č. 4 jsou uvedeny vypočtené hodnoty k i s chybou měření.

3.3 Měření tíhového zrychlení

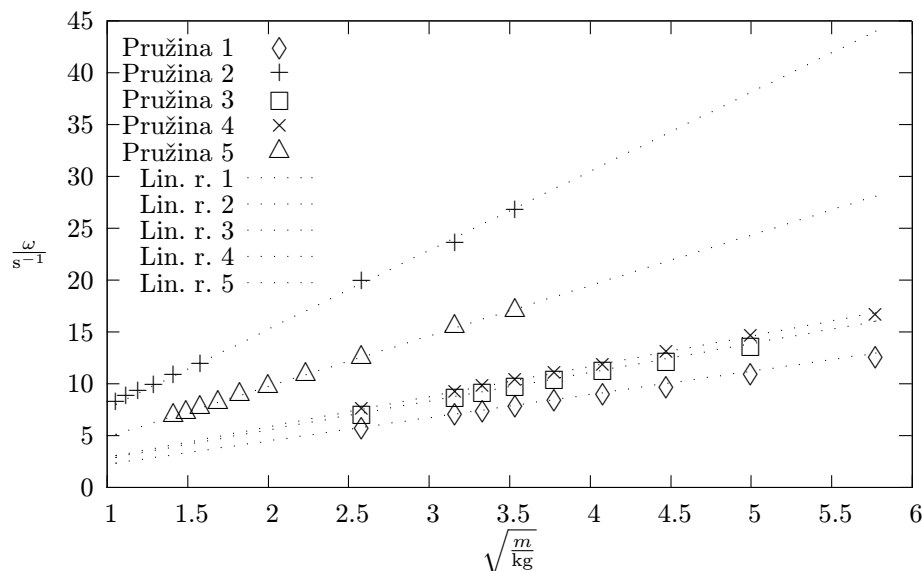
Pro výpočet tíhového zrychlení byly použity všechny hodnoty, které se mohly použít pro rovnici (9) (de facto tedy byly použity všechny měření dynamickou metodou a odpovídající měření pro dané hmotnosti statickou metodou).

$$s_g = 4\pi^2 \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{s_{\Delta y}}{T_i^2} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta y_i s_T}{T_i^3} \right)^2 \right)} \quad (12)$$

Tímto způsobem vychází tíhové zrychlení jako $g = (12,1 \pm 0,9) \text{ ms}^{-2}$.

3.4 Grafy závislostí

Graf závislosti $\omega = f(\sqrt{k})$ je označen jako Obrázek č. 6 a druhý graf vyjadřující $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$ má označení Obrázek č. 7.



Obrázek 7: Graf závislosti $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$

4 Diskuse

Hodnoty tuhosti pružin vypočtené statickou metodou a dynamickou metodou se poměrně hodně liší. U 3 pružin se dokonce ani neprotínají intervaly uvažující chybu měření. Nejspíše to je způsobeno zejména tím, že jsem zanedbal hmotnost pružin, která se uplatňuje zejména při kmitání pružiny. Také jsem zanedbal to, že některé pružiny se začnou protahovat až potom, co je na nich zavěšeno dostatečná hmotnost závaží - to je nejspíše způsobeno tím, že je určité napětí i v nenatažené pružině. Dále jsem zanedbal to, že sice závaží měla asi poměrně přesnou hmotnost, ale závaží měla pro lepší zavěšování na sobě připevněné provázky, jejichž hmotnost se taky mohla v menší míře uplatnit pro malé hmotnosti závaží.

Sice byla odečítána poloha spodního konce pružiny katetometrem, ale kvůli otřesům v budově a kvůli tomu, že je těžké úplně zastavit kmity pružin, jsem musel odhadovat polohu rovnovážného bodu spodního konce pružiny, protože pružina, byť s malou amplitudou, kmitala.

Také jsem zanedbal to, že jsem se mohl dostat pro některé závaží do nelineární oblasti pružiny. Ale vzhledem k tomu, že naměřené hodnoty prodloužení jsou velice blízké grafu přímky, tak tento problém nejspíše nenastal.

Vzhledem k tomu, že tíhové zrychlení v mém měření vyšlo jako $g = (12,1 \pm 0,9) \text{ m s}^{-2}$, což se od tabelované hodnoty [1] $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ značně liší. To ukazuje na to, že v měření byla skutečně přítomna systematická chyba. Zkoušel jsem zpracovat měření pro jednotlivé pružiny zvlášť, ale měření každé pružiny zvlášť také vykazují takto velkou systematickou chybu.

5 Závěr

Zjištěné hodnoty tuhostí pružin obě metody měření

Pružina č.	Statickou metodou	Dynamickou metodou
1	$(4,2 \pm 0,2)\text{kg s}^{-2}$	$(4,5 \pm 0,3)\text{kg s}^{-2}$
2	$(46 \pm 2)\text{kg s}^{-2}$	$(55 \pm 6)\text{kg s}^{-2}$
3	$(6,3 \pm 0,3)\text{kg s}^{-2}$	$(7,4 \pm 0,6)\text{kg s}^{-2}$
4	$(7,2 \pm 0,3)\text{kg s}^{-2}$	$(8,1 \pm 0,7)\text{kg s}^{-2}$
5	$(19,3 \pm 0,4)\text{kg s}^{-2}$	$(23,4 \pm 1,8)\text{kg s}^{-2}$

Hodnota zjištěného tíhového zrychlení $g = (12,1 \pm 0,9)\text{ m s}^{-2}$

6 Literatura

- [1] *J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky*
SNTL, Praha 1980