Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM I – Mechanika a molekulová fyzika

Úloha č. II

Název: Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru

Pracoval: Jiří Vackář stud. skup. 11 dne 31. 3. 2008

Odevzdal dne: 7. 4. 2008

Hodnocení:

Připomínky:

Kapitola referátu	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0 – 3	
Výsledky měření	0 – 9	
Diskuse výsledků	0 – 5	
Závěr	0 – 2	
Seznam použité literatury	0 – 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval: dne

1 Pracovní úkoly

1. Změřte tuhost k pěti pružin metodou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle $y = i(F)$.
3. Změřte tuhost pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g.
5. Sestrojte grafy závislostí
   $\omega = f(\sqrt{k})$
   $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$
6. Při zpracování použijte lineární regresi.

2 Teoretická část

Periodický pohyb označíme jako *harmonický kmit* pokud na těleso působí síla, která jej vrací do rovnovážné polohy a je přímo úměrná výchylce. Platí tedy

$$F = -ky \tag{1}$$

kde y je výchylka z rovnovážné polohy a konstantu úměrnosti k označíme v případě pružiny její *tuhost*.

Kmitavý pohyb můžeme aproximovat jako průmět pohybu po kružnici, úhlová frekvence souvisí s dobou kmitu T dle vztahu

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

2.1 Měření tuhosti pružiny statickou metodou

Pokud na pružinu zavěsíme závaží a soustava je v rovnovážném stavu, musí být gravitační síla stejně velká a opačně orientovaná, než síla pružiny F. Platí tedy

$$G = k(y - y_0) \tag{3}$$

kde y_0 je délka nezatížené pružiny a y se závažím.

Protože vztah je lineární, platí i pokud porovnáváme délky více a méně zatížené pružiny; v takovém případě uvažujeme tíhovou sílu přidaného závaží, ze vzorce 3 získáme následující vztah pro k

$$k = \frac{g(m - m_0)}{y - y_0} \tag{4}$$

kde $m - m_0$ je hmotnost přidaného závaží a $y - y_0$ příslušné prodloužení.

Při měření touto metodou se musíme pohybovat v rozmezí zatížení, kde platí vztah 1; při příliš velkém zatížení se projevují další vlivy, při minimálním zatížení též vztah nemusí platit přesně.

2.2 Měření tuhosti pružiny dynamickou metodou

Vychýlíme-li těleso zavěšené na pružině z rovnovážné polohy, bude vykonávat harmonické kmity s frekvencí [1]

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

Vyjádříme-li k a dosadíme dle vzorce 2, získáme

$$k = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2} \tag{6}$$

2.3 Tíhové zrychlení

Tíhové zrychlení pomocí závaží na pružině lze změřit následujícím způsobem. Těleso zavěsíme na pružinu a změříme prodloužení y. Potom jej ve vertikálně rozkmitáme a změříme periodu kmitu. Z rovnic 3 a 5 získáme vztah pro určení tíhového zrychlení

$$g = \omega^2 y \tag{7}$$

Pokud se chceme vyhnout měření délky nezatížené pružiny, vyjděme z rovnic 4 a 6 a získáme

$$g = \frac{\omega^2 m(y - y_0)}{m - m_0} = \frac{(\frac{2\pi}{T})^2 m(y - y_0)}{m - m_0} \tag{8}$$

3 Průběh a výsledky měření

3.1 Podmínky pokusu

Teplota místnosti	23,0 °C
Atmosférický tlak	987,5 kPa

3.2 Metoda měření

Postupně jsem měřil pět pružin. Nejprve jsem změřil délku pružiny s závažím o hmotnosti 20 g (u pružiny s nejmenší tuhostí) či 50 g (u ostatních). Očekávám, že srovnání s touto hodnotou povede k větší přesnosti než měření délky nezatížené pružiny. Následně jsem pro různá závaží měřil prodloužení oproti této délce a čas deseti kmitů. Měření nebylo z časových důvodů možné u všech závaží opakovat, opakoval jsem jej pouze pokud čas byl menší než 7 s a bylo riziko, že se mi nepodařilo odpočítat deset kmitů. V těchto případech jsem měřil několikrát, ve výsledcích uvádím aritmetický průměr z hodnot, které jsem nepovažoval za hrubé chyby. Závaží jsem volil tak, abych získal několik hmotností, které bych měl změřené u všech pružin a následně je mohl srovnávat.

Interval, na kterých bylo možné měřit tuhost všech pružin metodou dynamickou, je poměrně krátký, protože pružina s nejmenší tuhostí se při zátěži přes 200 g prodloužila natolik, že byla mimo rozsah katetometru a naopak nejtužší při zátěži menší než 180 g kmitala tak rychle, že nebylo možné počítat kmity.

3.3 Nejistoty měření

Při měření katetometem lze dosáhnout teoretické přesnosti až 0,05 mm, avšak kvůli otřesům podlahy laboratoře a podložky je nejistota přibližně desetinásobná. Protože prodloužení je rozdíl dvou hodnot, odhaduji nejistotu na 1 mm.

Čas jsem měřil digitálními stopkami, na měření se projevila hlavně chyba lidského faktoru, protože není možné stopky spustit a zastavit tak, aby obě akce proběhly v okamžiku, kdy je závaží ve stejné fázi. Nejistotu odhaduji na 0,5 s.

Odchylku uvedené hmotnosti závaží od skutečnosti můžeme, vzhledem k nejistotám jiných veličin, zanedbat.

Reletivní nejistotu měření statickou metodou (u většiny výsledků, v závislosti na prodloužení pružiny) vypočítáme metodou přenosu chyb v rozmezí 0,5–3 %.

Relativní nejistotu měření dynamickou metodou vypočítáme (v závislosti na době deseti kmitů) v rozmezí 3–10 %.

Statistická nejistota je uvedená u tabulek s výsledky.

3.4 Naměřené hodnoty a výsledky

V tabulkách je použité následující označení:

m	hmotnost závaží
m_0	hmotnost nejlehčího závaží, oproti kterému bylo měřeno prodloužení
l	prodloužení oproti zatížení závažím o hmotnosti m_0
T	čas deseti kmitů
k_{stat}	dopočítaná tuhost metodou statickou (dle vzorce 4)
k_{dyn}	dopočítaná tuhost metodou statickou (dle vzorce 6)
g	Dopočítané gravitační zrychlení (dle vzorce 8)

3.4.1 Pružina 1

$m_0 = 20$g

l [mm]	m [g]	T [s]	k_{stat} [Nm^{-1}]	k_{dyn} [Nm^{-1}]	g [ms^{-2}]
188,4	100	9,47	4,17	4,40	10,37
233,8	120	10,41	4,20	4,37	10,22
278,9	140	11,35	4,22	4,29	9,97
323,3	160	12,01	4,25	4,38	10,11
367,7	180	12,53	4,27	4,53	10,40
408,9	200	13,15	4,32	4,57	10,37
průměrné hodnoty			*4,24*	*4,42*	*10,24*
statistická nejistota			0,05	0,1	0,17

3.4.2 Pružina 2

$m_0 = 50$g

l [mm]	m [g]	T [s]	k_{stat} [Nm^{-1}]	k_{dyn} [Nm^{-1}]	g [ms^{-2}]
80,3	100	7,92	6,11	6,29	10,11
142,2	140	9,26	6,21	6,45	10,18
202,6	180	10,61	6,29	6,31	9,84
233,8	200	11,09	6,29	6,42	10,01
309,4	250	12,43	6,34	6,39	9,88
průměrné hodnoty			*6,25*	*6,37*	*10*
statistická nejistota			0,09	0,07	0,15

3.4.3 Pružina 3

$m_0 = 50$g

l [mm]	m [g]	T [s]	k_{stat} [Nm^{-1}]	k_{dyn} [Nm^{-1}]	g [ms^{-2}]
68,8	100	7,52	7,13	6,98	9,61
123,6	140	8,83	7,14	7,09	9,74
177,3	180	10,14	7,19	6,91	9,43
205,6	200	10,56	7,16	7,08	9,70
272,4	250	11,80	7,20	7,09	9,65
340,3	300	12,86	7,21	7,16	9,75
průměrné hodnoty			*7,17*	*7,05*	*9,65*
statistická nejistota			0,03	0,09	0,12

3.4.4 Pružina 4

$m_0 = 50$g

l [mm]	m [g]	T [s]	k_{stat} [Nm^{-1}]	k_{dyn} [Nm^{-1}]	g [ms^{-2}]
10,6	100		46,27		
19,1	140		46,23		
29,1	180		43,82		
31,9	200	4,12	46,13	46,52	9,89
42,9	250	4,20	45,73	55,95	12,00
53,4	300	4,70	45,93	53,61	11,45
75,0	400	5,91	45,78	45,21	9,69
95,0	500	6,51	46,47	46,58	9,83
průměrné hodnoty			*45,8*	*49,57*	*10,57*
statistická nejistota			0,84	4,86	1,07

3.4.5 Pružina 5

$m_0 = 50$g

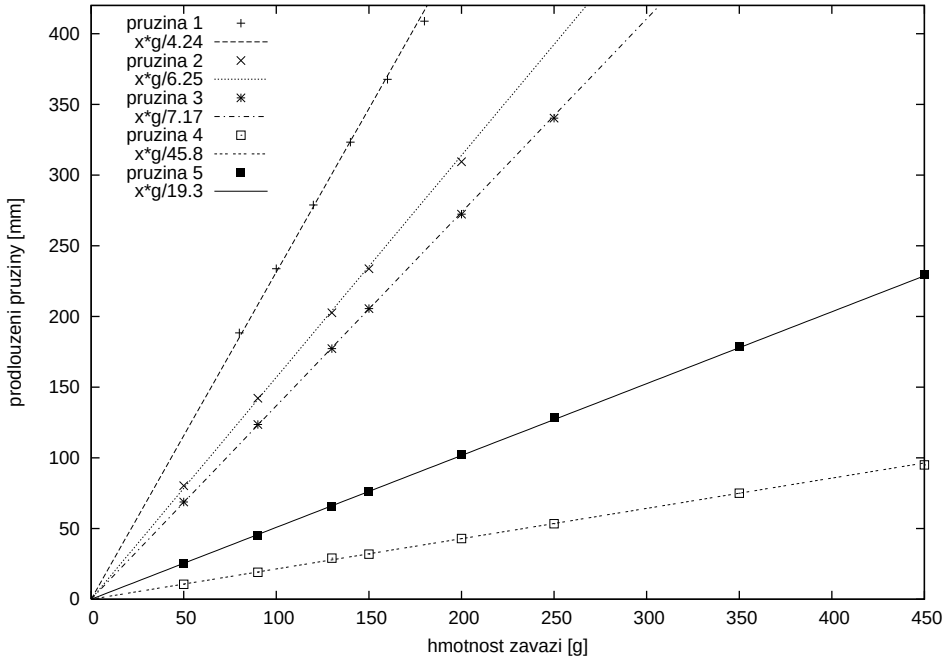
l [mm]	m [g]	T [s]	k_{stat} [Nm^{-1}]	k_{dyn} [Nm^{-1}]	g [ms^{-2}]
25,1	100	4,65	19,54	18,26	9,17
45,1	140	5,49	19,58	18,34	9,19
65,6	180	6,16	19,44	18,73	9,45
76,2	200	6,37	19,31	19,46	9,88
102,6	250	7,31	19,12	18,47	9,48
128,8	300	7,93	19,04	18,83	9,70
178,9	400	9,18	19,19	18,74	9,58
230,0	500	10,32	19,19	18,53	9,47
průměrné hodnoty			*19,3*	*18,67*	*9,49*
statistická nejistota			0,2	0,38	0,24

3.4.6 Gravitační zrychlení

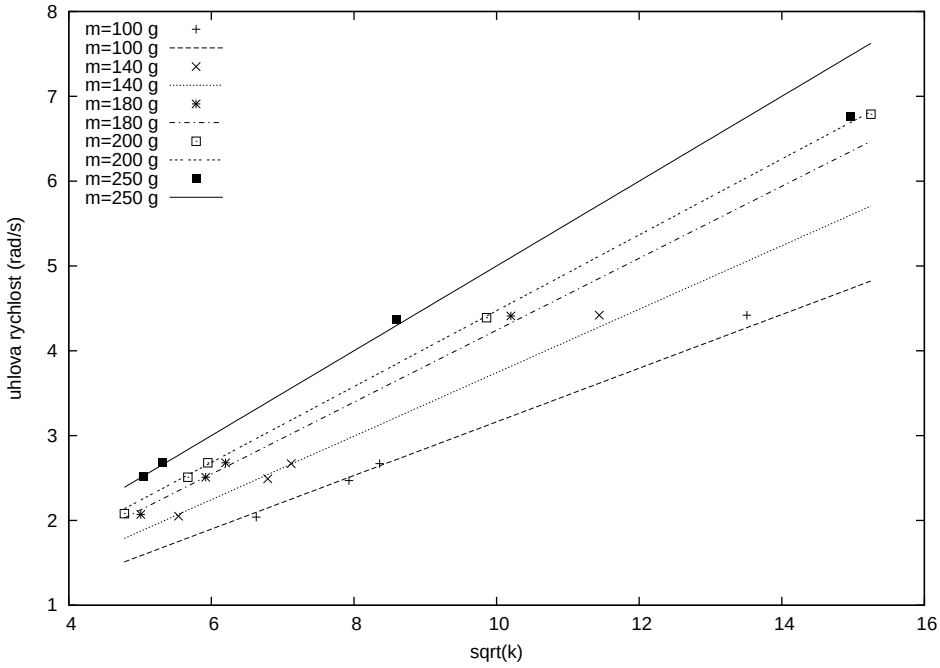
Z průměru všech hodnost naměřených u pružin 1, 2, 3 a 5 (pružinu 4 jsem vynechal, protože hodnoty na ní naměřené měly příliš velký rozptyl) vychází

$$g = (9,85 \pm 0,35)\text{ms}^{-2}$$

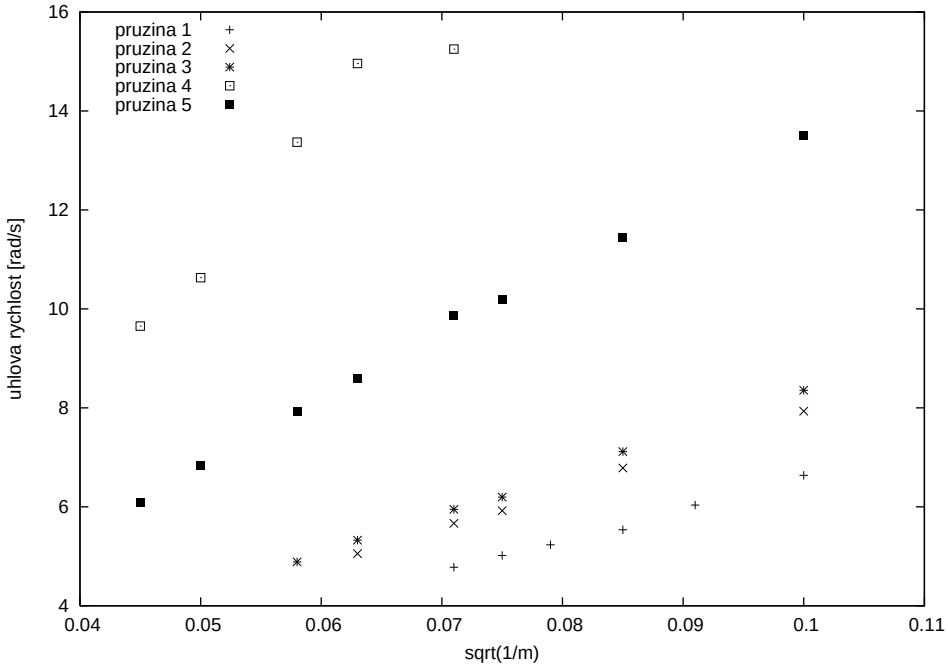
3.5 Graf závislosti prodloužení na působící síle



3.6 Graf závislosti ω na $\sqrt{k}$



3.7 Graf závislosti ω na $\frac{1}{m}$



4 Diskuse výsledků

Tuhosti pružiny měřené metodou statickou i dynamickou se shodují v rámci své nejistoty.

Je vidět, že měření statickou metodou je ve většině případů o něco přesnější. V případě měření dynamickou metodou se projevuje systematická chyba způsobená tím, že pružina není nehmotná a proto by hmotnost, která vystupuje ve vzorci, měla být ve skutečnosti vyšší. Proto dynamickou metodou může vycházet tuhost vyšší než metodou statickou; toto se však stalo pouze u tří pružin.

Naměřené gravitační se pouze nepatrně liší od tabulkové hodnoty [2] 9,81 Nm^{-1}.

Z grafů je vidět, že všechny zobrazované závislosti jsou lineární, od proložené přímky se liší pouze v rámci své nejistoty.

5 Závěr

Tuhost pružin změřená metodou statickou a dynamickou vychází

Pružina 1

$$k_{stat} = (4,24 \pm 0,05)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$
$$k_{dyn} = (4,42 \pm 0,1)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$

Pružina 2

$$k_{stat} = (6,25 \pm 0,09)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$
$$k_{dyn} = (6,37 \pm 0,07)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$

Pružina 3

$$k_{stat} = (7,17 \pm 0,03)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$
$$k_{dyn} = (7,05 \pm 0,09)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$

Pružina 4

$$k_{stat} = (45,8 \pm 0,8)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$
$$k_{dyn} = (50 \pm 5)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$

Pružina 5

$$k_{stat} = (19,3 \pm 0,2)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$
$$k_{dyn} = (18,7 \pm 0,4)\,\mathrm{Nm}^{-1}$$

Místní gravitační zrychlení jsem určil

$$g = (9,85 \pm 0,35)\mathrm{ms}^{-2}$$

Reference

[1] Studijní text fyzikálního praktika http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_112.pdf

[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980