1 Pracovní úkol

1. Změřte tuhost k pěti pružin metodou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle $y = y(F)$
3. Změřte tuhost k pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g.
5. Sestrojte grafy závislostí:
   (a) $\omega = f\left(\sqrt{k}\right)$
   (b) $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$
6. Při zpracování použijte lineární regresi.

2 Teorie

Kmitání je změna (např. v čase) nějaké veličiny, která se periodicky opakuje [1]. Nejjednodušším případem je harmonické kmitání [2]. Síla působí proti směru pohybu, vždy do rovnovážné polohy, dle vztahu

$$F = -ky, \tag{1}$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti a y výchylka z rovnovážné polohy, kterou můžeme spočítat dle vztahu

$$y = y_{max} sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{2}$$

kde y_{max} je amplituda výchylky, t čas, φ_0 počáteční fáze a ω úhlová rychlost, kterou určíme dle

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{3}$$

přičemž T je perioda jednoho kmitu.

Konstantu úměrnosti k, pro níž platí vztah

$$F = ky, \tag{4}$$

kde F je deformační síla působená na lineární pružinu, nazýváme tuhostí pružiny. Zavěsíme-li na pružinu závaží známé hmotnosti, pak můžeme tuhost pružiny spočítat po ustálení rovnováhy mezi silou pružiny a tíhovou silou působící na závaží dle vztahu

$$k = \frac{G}{\Delta y}, \tag{5}$$

kde G je tíha tělesa a Δy prodloužení pružiny oproti rovnovážné poloze bez závaží. Po vychýlení závaží z rovnovážné polohy pružina kmitá s úhlovou frekvencí [3]

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{6}$$

kde m je hmotnost pružiny. Tuhost pružiny dynamickou metodou tedy určíme dle vztahu

$$k = \omega^2 m = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \tag{7}$$

Ze znalosti doby trvání kmitu můžeme určit hodnotu místního tíhového zrychlení pomocí vztahu

$$g = \omega^2 y_0, \tag{8}$$

kde y_0 je výchylka při ustálení kmitů se shodným závažím jako je měřená perioda kmitu (a tedy i ω). Tíhové zrychlení v Praze je $g = 9,8137\, m/s^2$ [4]

3 Výsledky měření

Dále v textu budou označeny jednotlivé pružiny dle následujícího značení, hodnoty hmotnosti a délky jsou orientační.

Tabulka 1: charakterizace pružin na základě jejich délky l_0 a hmotnosti m

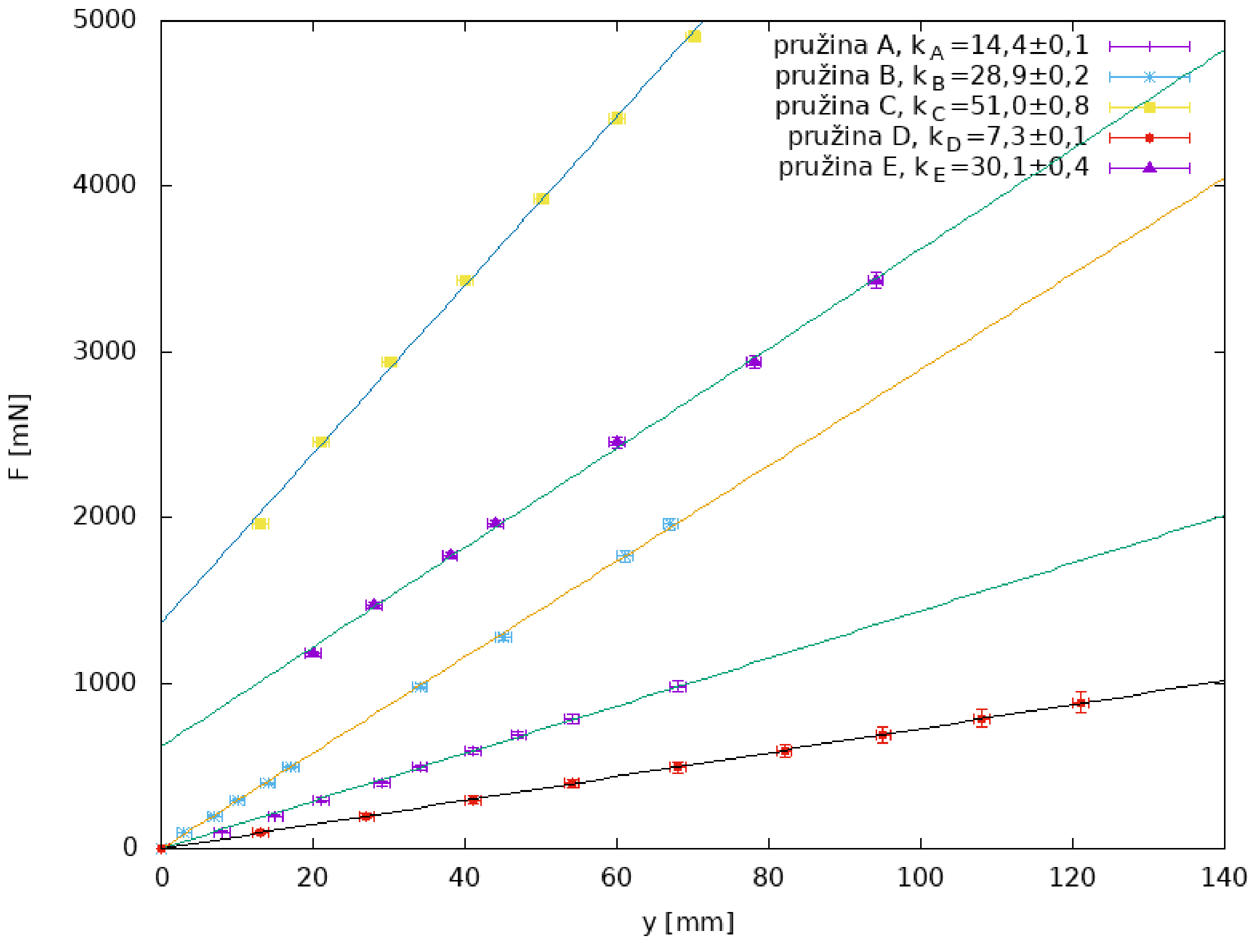
pružina	l_0 [cm]	m [g]
A	12,1	2,4
B	13,4	3,9
C	14,8	6,8
D	12,6	6,3
E	15,5	43,6

3.1 Měření statickou metodou

Statickou metedou se tuhost pružiny měřila pomocí katetometru, který má přesnost měření 0,1 mm, kvůli častým otřesům podlahy je ovšem rozumné uvažovat přesnost měření 1 mm. Odchylka hmotnosti závaží byla 5 %.

Tabulka 2: Naměřené hodnoty při měření tuhosti pružiny statickou metodou

pružina A		pružina B		pružina C		pružina D		pružina E	
m [kg]	y [mm]	m [kg]	y [mm]	m [kg]	y [mm]	m [kg]	y [mm]	m [kg]	y [mm]
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	8	10	3	50	1	10	13	50	5
20	15	20	7	100	3	20	27	100	15
30	21	30	10	150	7	30	41	120	20
40	29	40	14	200	13	40	54	150	28
50	34	50	17	250	21	50	68	180	38
60	41	100	34	300	30	60	82	200	44
70	47	130	45	350	40	70	95	250	60
80	54	180	61	400	50	80	108	300	78
100	68	200	67	450	60	90	121	350	94



Graf 1: Naměřené hodnoty při statické metodě určení tuhosti pružin

Odchylka v popisku grafu je standardní synoptická chyba fitu (dále značena jako η_{fit}), celkovou odchylku tuhosti pružiny pak můžeme spočítat dle vztahu

$$u_k = k\sqrt{\eta_{fit}^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}.\right)^2} \tag{9}$$

Tabulka 3: Naměřené hodnoty tuhosti pružin statickou metodou

pružina	k [kg$\cdot$ s^{-2}]
A	14,4±0,2
B	28,9±0,4
C	51,0±0,9
D	7,3±0,1
E	30,1±0,5

3.2 Měření dynamickou metodou

Všechna měření byla provedena se závažím o hmotnosti 250 g.

Tabulka 4: Naměřené hodnoty při měření tuhosti pružiny dynamickou metodou

pružina A		pružina B		pružina C		pružina D		pružina E	
t [s]	počet kmitů	t [s]	počet kmitů	t [s]	počet kmitů	t [s]	počet kmitů	t [s]	počet kmitů
9,68	12	6,28	11	4,56	11	8,12	7	4,16	7
8,88	11	6,32	11	4,60	11	9,28	8	4,16	7
9,64	12	6,32	11	4,60	11	9,36	8	4,72	8
8,84	11	6,32	11	4,64	11	9,28	8	4,76	8
8,88	11	6,32	11	4,60	11	9,32	8	4,16	7

Tabulka 5: Periody kmitů pružin

pružina A	pružina B	pružina C	pružina D	pružina E
0,81	0,57	0,41	1,16	0,59
0,81	0,57	0,42	1,16	0,59
0,80	0,57	0,42	1,17	0,59
0,80	0,57	0,42	1,16	0,60
0,81	0,57	0,42	1,17	0,59
$0,81 \pm 0,01$	$0,57 \pm 0,01$	$0,42 \pm 0,01$	$1,16 \pm 0,01$	$0,59 \pm 0,01$

Sonar Go!Motion, kterým byla měřena doba trvání periody, měl vzorkovací frekvenci $25\,Hz$ [5], tedy odchylka délky jedné periody je $0,08\,s$. Proto bylo naměřeno více period v jednom záznamu, čímž se odchylka ΔT sníží, proto je výsledná odchylka spočítáná ze vztahu

$$u_T = \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \sigma_T^2}, \tag{10}$$

kde σ_T je střední směrodatná odchylka počítaná dle

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_1^5 (T - \overline{T})}{20}}. \tag{11}$$

Tato složka je však příliš malá, než aby ovlivnila výslednou odchylku u_T.

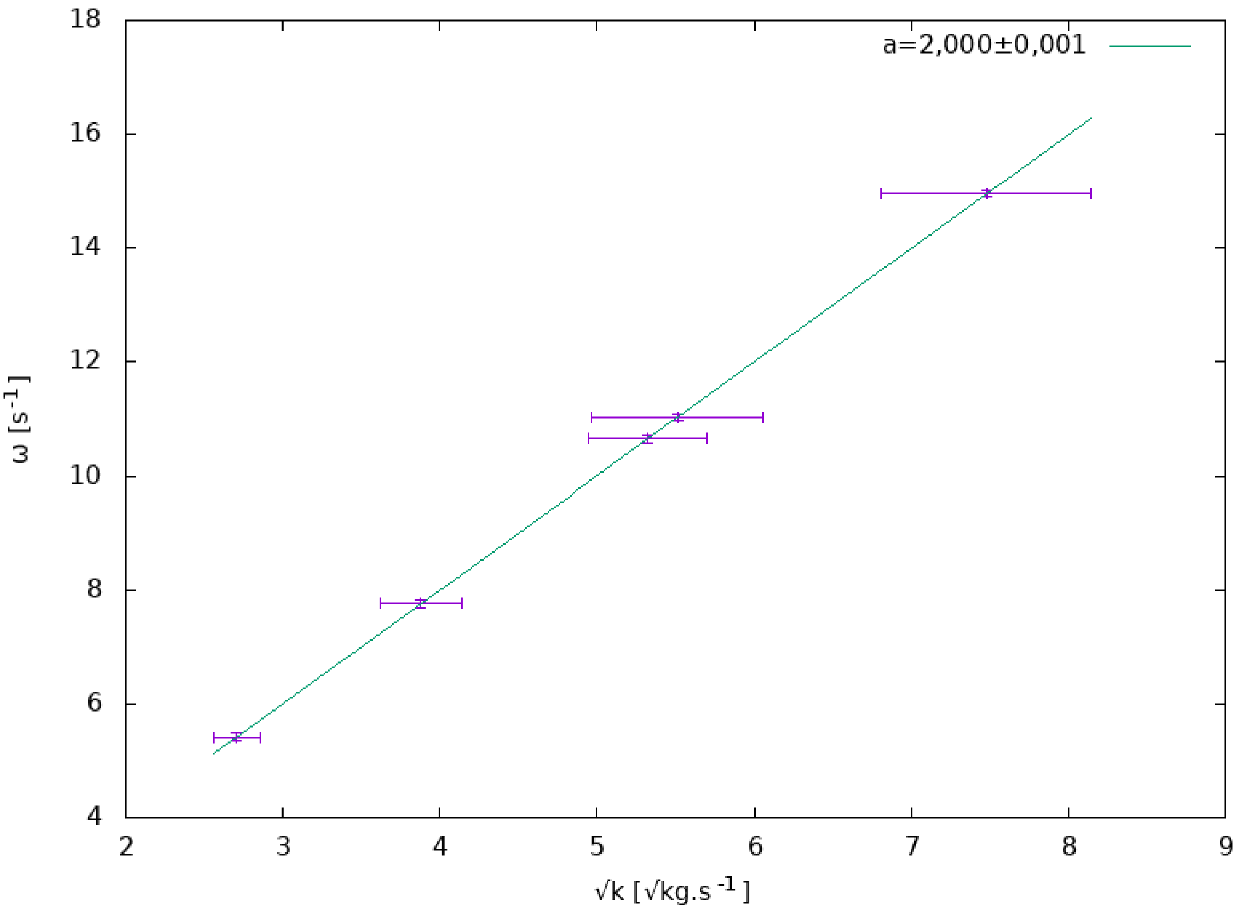
Tabulka 6: Naměřené hodnoty tuhosti pružin dynamickou metodou

pružina	k [kg$\cdot$ s^{-2}]
A	15±1
B	30±3
C	51±5
D	7,3±0,4
E	28±2

Chyba určení tuhosti pružiny se spočítá dle vztahu

$$u_k = k\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}, \tag{12}$$

přičemž koeficient 4 je před částí s chybou periody kvůli tomu, že je T ve druhé mocnině, tedy při parciální derivaci $\partial k/\partial T$ se získá koeficient 2 následně umocněný druhou mocninou.



Graf 2: Závislost úhlové rychlosti kmitů ω na odmocnině tuhosti pružiny $\sqrt{k}$

Pozorujeme, že závislost úhlové rychlosti kmitů ω na odmocnině tuhosti pružiny $\sqrt{k}$ je lineární a navzdory poměrně velké odchylce určení tuhosti pružin dynamickou metodou je závislos vystihnuta poměrně přesně.

3.3 Určení místního tíhového zrychlení

Tabulka 7: Naměřené hodnoty pro výpočet místního tíhového zrychlení

pružina	ω [s^{-1}]	y [mm]	g [$m \cdot s^{-2}$]
pružina A	$0,52 \pm 0,01$	68	9,93
pružina B	$0,36 \pm 0,01$	34	10,36
pružina B	$0,57 \pm 0,01$	81	9,84
pružina D	$0,75 \pm 0,01$	134	9,40
průměr			(9,9±0,2)

Celková chyba určení místního tíhového zrychlení g je

$$u_g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta \omega}{\omega}\right)^2 + \sigma_g^2}, \tag{13}$$

kde σ_g je střední směrodatná odchylka průměru g ve tvaru

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_1^4 (g - \overline{g})}{12}}. \tag{14}$$

4 Diskuze

Určili jsme tuhost pružin metodou statickou za pomoci lineární regrese a metodou dynamickou. Naměřené hodnoty oběma metodami jsou velmi podobné, jak je možno posoudit z tabulky (8), určená hodnota tuhosti pružiny E je dokonce na desetiny shodná u obou metod.

Tabulka 8: Naměřené hodnoty tuhosti pružin statickou a dynamickou metodou

pružina	$k_{staticke}$ [$kg \cdot s^{-2}$]	$k_{dynamicke}$ [$kg \cdot s^{-2}$]
A	14,4±0,2	15±1
B	28,9±0,4	30±3
C	51,0±0,9	51±5
D	7,3±0,1	7,3±0,4
E	30,1±0,5	28±2

Z tabulky (8) je rovněž zřejmé, že dynamická metoda určení tuhosti pružiny má větší odchylku, zejména kvůli nepřesnostem při měření doby jedné periody kmitu, neboť tuhost pružiny závisí na periodě kmitu s druhou mocninou. Pro korekci této chyby se měřil čas průběhu několika kmitů, aby byla výsledná odchylka co nejmenší. Na chybu měření tuhosti pružiny statickou metodou mělo největší vliv měření velikosti vchylky katetometrem, které bylo prováděno s přesností na 1 mm, přestože samotný katetometr je schopný měřit s přesností 0,1 mm, ale díky otřesům podlahy v laboratoři nemůžeme s takovouto přesností počítat.

Z grafu (2) můžeme snadno vyčíst, že závislost $\omega = f\left(\sqrt{k}\right)$ je lineární, navíc vyšla velice malá chyba určení parametru fitu, což ukazuje, že hodnoty tuhosti určené dynamickou metodou jsou poměrně přesné.

Rovněž bylo určeno místní tíhové zrychlení $g = (9,9 \pm 0,2)\,m \cdot s^{-2}$, které se blíží tabulkové hodnotě $g = 9,8\,m \cdot s^{-2}$ [6], respektive přesnému údaji pro Prahu $g = 9,8137\,m \cdot s^{-2}$. Opět největší vliv na výslednou chybu měla odchylka měření periody kmitu, která ve vztahu pro výpočet tíhového zrychlení vystupuje ve druhé mocnině.

5 Závěr

Provedli jsme měření tuhosti pěti pružin metodou statickou a metodou dynamickou, naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce (9).

Tabulka 9: Naměřené hodnoty tuhosti pružin statickou a dynamickou metodou

pružina	$k_{staticke}$ [kg· s^{-2}]	$k_{dynamicke}$ [kg· s^{-2}]
A	14,4±0,2	15±1
B	28,9±0,4	30±3
C	51,0±0,9	51±5
D	7,3±0,1	7,3±0,4
E	30,1±0,5	28±2

Rovněž jsme vynesli do grafu závislost $\omega = f\left(\sqrt{k}\right)$, která je lineární a nakonec určili místní tíhové zrychlení $g = (9,9 \pm 0,2)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

6 Literatura

[1] *kmitání* [online]. [cit. 2019-03-20]
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Kmitání`

[2] *II. Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru* [online]. [cit. 2019-03-20]
Dostupné z: `https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_102.pdf`

[3] sešit fyziky ze SŠ

[4] *Tíhové zrychlení* [online]. [cit. 2019-03-25]
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Tíhové_zrychlení`

[5] tabulka na místě měření

[6] MIKULČÁK, J., B. KLIMEŠ, J. ŠIROKÝ, V. ŠUBA, F. ZEMÁNEK. Matematické, fyzikální a chemické tabullky pro střední školy. 4. vyd. Prometheus, 2016