

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I

Úloha č. II

Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru

Měřil a zpracoval: Antonín Baďura, FOF

Měřil dne: 13. března 2018

Odevzdal dne: 20. března 2018

Poznámky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0–5	
Teoretická část	0–1	
Výsledky měření	0–8	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Seznam použité literatury	0–1	
Úhrnem	nejvýše 20	

Hodnotil dne

1 Zadání úlohy

1. Změřte tuhost k pěti pružin metodou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle $y = y(F)$.
3. Změřte tuhost k pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g .
5. Sestrojte grafy závislosti:
 - (a) $\omega = f(\sqrt{k})$,
 - (b) $\omega = f(\sqrt{\frac{1}{m}})$.
6. Při zpracování použijte lineární regresi.

2 Teoretická část

Harmonickým kmitavým pohybem nazýváme pohyb, jenž je vyvolán silou \mathbf{F} úměrnou výchylce y . O velikosti síly v lineárním případě platí:

$$F = -ky. \quad (1)$$

Je-li vratná síla \mathbf{F} technicky realizována deformací lineární pružiny, označuje veličina k tuhost pružiny, a dostaneme tak vztah pro sílu potřebnou k její deformaci:

$$F_D = ky. \quad (2)$$

Cílem úlohy bylo charakterizovat pět pružin pomocí jejich tuhostí. Prvním postupem je metoda statická, při níž je pružina zatížena závažím a po ustálení je měřeno prodloužení pružiny. Z rovnice rovnováhy mezi silou tíhovou G a vratnou silou pružiny F_D

$$G - F_D = 0 \quad (3)$$

dostáváme vztah pro výpočet tuhosti pružiny:

$$k = \frac{G}{y_0} = \frac{mg}{y_0}, \quad (4)$$

kde m je hmotnost závaží a g tíhové zrychlení [1].

Druhým postupem je metoda dynamická, která charakterizuje tuhost pružiny pomocí úhlové frekvence jejich kmitů:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (5)$$

odkud je možno ze známého vztahu $\omega = 2\pi/T$ (T je perioda kmitů) snadno vyjádřit k jako:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \quad (6)$$

Z periody kmitu závaží na pružině je možno také určit tíhové zrychlení v místě měření, a to kombinací rovnic 3 a 5 jako:

$$g = \omega^2 y_0, \quad (7)$$

kde y_0 je statické prodloužení pružiny po zavěšení závaží [1].

3 Výsledky měření

Fyzikální podmínky v laboratoři. Měření probíhalo při teplotě $(24,5 \pm 0,4)^\circ\text{C}$, atmosférickém tlaku (977 ± 2) hPa a relativní vlhkosti vzduchu $(31,5 \pm 2,5)\%$.

Pro potřeby vhodného zápisu jsem označil měřené pružiny písmeny A–E. Jejich hmotnosti m_i a délky d_i jsou uvedeny v následujícím přehledu:

označení pružiny	$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$
A	5,3	23,4
B	2,4	13,3
C	6,3	12,6
D	3,9	11,6
E	6,3	10,4

Tabulka 1: Přehled zkoumaných pružin

Přičemž hmotnost byla měřena s nejistotou $\pm 0,1$ g a délka byla měřena katetometrem s nejistotou ± 1 mm.

Během měření pomocí obou metod byla použita závaží o hmotnosti 10–500 g, hmotnosti závaží byly určeny s přesností $\pm 0,1$ g.

Poznámka k listu s potvrzenými výsledky měření. Během přípravy tisku naměřených hodnot došlo k zmatení odkazů mezi buňkami v tabulkovém editoru a některé hodnoty uvedené v listu s naměřenými hodnotami, již nebyly měřeny přímo, jsou proto nesmyslné (jedná se především o sloupec y_0). Všechny nezbytně nutné údaje pro zpracování však zůstaly zachovány.

3.1 Statická metoda

Absolutní prodloužení y_0 pružin bylo měřeno katetometrem, jehož přesnost vinou nepevného umístění byla odhadnuta v [1] na 1 mm. Naměřené hodnoty y_0 uvedené v tabulce 2 a v grafu 1 jsou tak zatíženy touto nejistotou.

Tuhosti jednotlivých pružin, byly spočteny na základě metody nejmenších čtverců a lineární regrese, přičemž metody byly aplikovány na hodnoty prodloužení pružin y_0 , zřejmě je proto ve všech regresních rovnicích absolutní člen nulový (nulové prodloužení odpovídá nulové působící síle). Ze vztahu 3 máme, že lineární koeficient A regresní křivky $y = AF$ je roven $A = \frac{1}{k}$ (zde představuje F tíhovou sílu). Po vypočtení A je tak možno snadno vyjádřit k jako:

$$k = \frac{1}{A}, \quad (8)$$

kde g je tíhové zrychlení (počítáme s hodnotou $9,8137 \text{ ms}^{-2}$). Tabulka 3 uvádí spočtené tuhosti jednotlivých pružin. Nejistota k pocházející z regresní analýzy je z [2]:

$$\sigma^2 = \frac{R^2}{X^2(n-1)}, \quad (9)$$

(kde R je reziduální suma čtverců, X^2 suma čtverců hodnot F , n počet měření pro jednu pružinu) byla vůči nejistotě způsobené měřidly zanedbatelná (obvykle o 2 řády nižší). Ta byla určena ze

$\frac{m}{g}$	A		B		C		D		E	
	$\frac{y_0}{cm}$	$\frac{T}{s}$	$\frac{y_0}{cm}$	$\frac{T}{s}$	$\frac{y_0}{cm}$	$\frac{T}{s}$	$\frac{y_0}{cm}$	$\frac{T}{s}$	$\frac{y_0}{cm}$	$\frac{T}{s}$
10	2,9	0,38	0,3	0,17	1,3	0,26	0,6	0,17	1,2	0,26
20	5,8	0,51	0,6	0,17	2,7	0,35	1,3	0,24	2,7	0,34
30	8,8	0,61	0,9	0,20	4,1	0,42	2,0	0,28	3,7	0,42
50	14,8	0,79	1,6	0,26	6,8	0,53	3,4	0,37	6,7	0,53
100	29,6	1,10	3,3	0,37	13,5	0,74	6,6	0,52	13,4	0,74
200			6,8	0,52	27,0	1,04	13,0	0,72	26,7	1,04
300			9,9	0,63	40,3	1,27	19,6	0,88	40,0	1,27
500			16,3	0,81			32,4	1,12		

Tabulka 2: Prodloužení pružin A–E y_0 a perioda jejich kmitů T při zatížení závaží o hmotnosti m , kteréžto hodnoty byly naměřeny pomocí katetometru a sonaru (nejistoty měření jsou uvedeny v příslušných kapitolách).

vztahu [2]:

$$\sigma^2 = \frac{g^2}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\sigma_m}{y_{0i}} \right)^2 + \left(\frac{m_i \sigma_y}{y_{0i}^2} \right)^2 \right), \quad (10)$$

tj. běžného vztahu pro přenos nejistoty nepřímého měření. Zde jsou σ_m a σ_y nejistoty měření hmotnosti závaží, resp. prodloužení pružiny na katetometru, y_{0i} prodloužení závěsu a m_i hmotnost závaží.

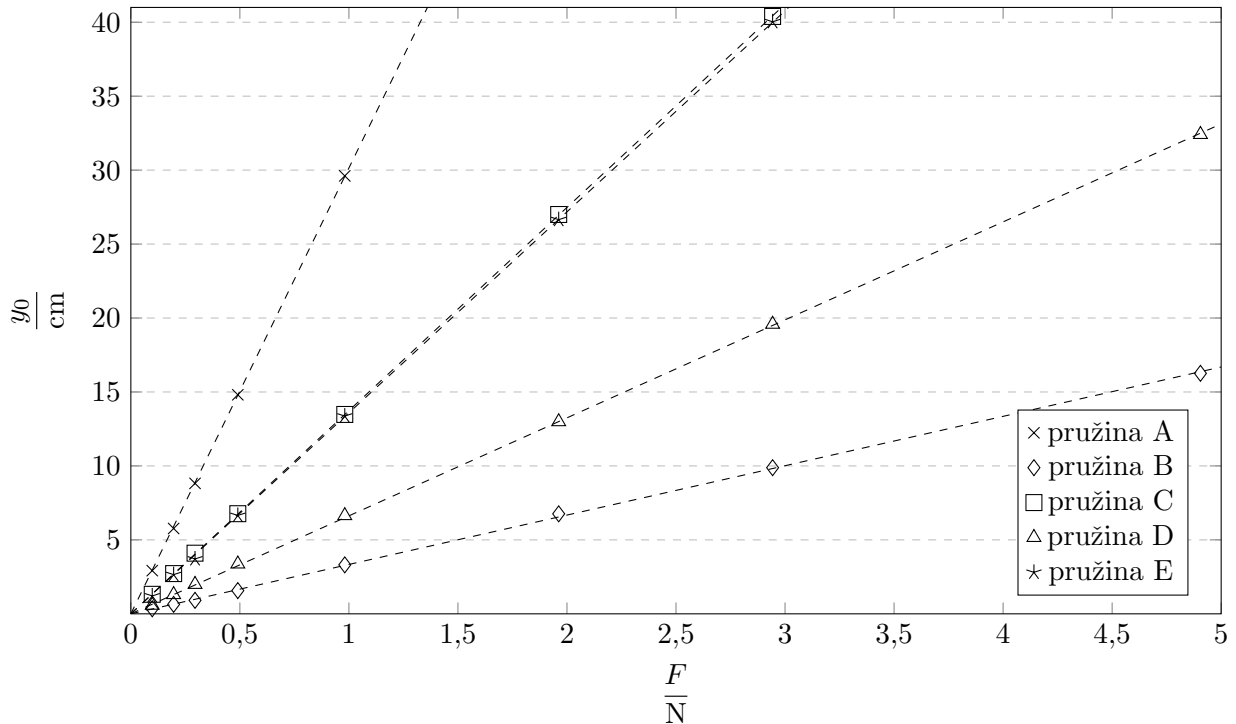
pružina	$\frac{k}{N m^{-1}}$
A	(3,32 ± 0,07)
B	(30,0 ± 3,8)
C	(7,28 ± 0,25)
D	(15,1 ± 1,2)
E	(7,36 ± 0,29)

Tabulka 3: Tuhosti pružin změřené statickou metodou

3.2 Dynamická metoda

Perioda kmitů byla měřena pomocí sonaru, který snímal polohu závaží s frekvencí 25 Hz. Vzhledem k faktu, že nejvyšší naměřená frekvence kmitů byla menší než 10 Hz, uvažuji nejistotu tohoto měření založenou jen na přesnosti odečtu dat z programu, což odhaduji 0,1 s pro každé měření, které zahrnovalo 19–40 kmitů, nejistota měření periody kmitů je tak menší než 0,01 s. V tomto případě byl určována směrnice A přímkou $m = A \frac{T^2}{4\pi^2}$ (srov. s rovnicí 6), kde platí:

$$k = A, \quad (11)$$



Graf 1: Závislost prodloužení jednotlivých pružin na působící síle, která byla naměřena statickou metodou. Uvedeny jsou rovněž regresní křivky závislostí, v jejichž rovnicích jsou absolutní členy nulové, směrnice odpovídají převráceným hodnotám určených tuhostí k po potřebném převedení na $\text{N}(\text{cm})^{-1}$.

tedy A je rovna hledané tuhosti pružiny. Nejistota regresní analýzy spočtená stejně jako v rovnici 9 v tomto případě byla srovnatelně velká jako nejistota instrumentální, proto byla výsledná nejistota určena jako odmocnina součtu čtverců dílčích nejistot, jak doporučuje [2]. Nejistota způsobená měřidly byla určena jako:

$$\sigma^2 = \frac{16\pi^4}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\sigma_m}{T_i^2} \right)^2 + \left(\frac{m_i \sigma_T}{T_i^3} \right)^2 \right), \quad (12)$$

kde σ_T a σ_m jsou nejistoty měření period, resp. hmotností, m_i je hmotnost jednotlivých závaží a T_i periody odpovídajících kmitů.

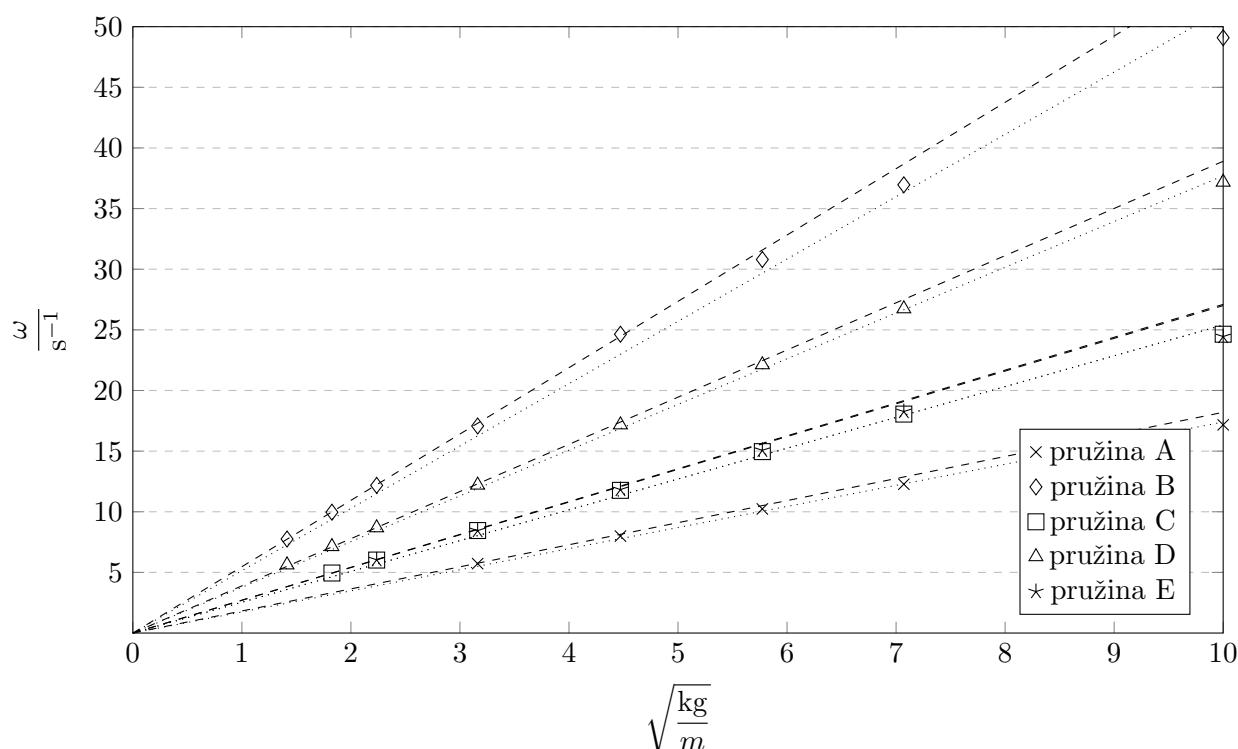
V tabulce 4 jsou uvedeny spočtené tuhosti pružin spolu s nejistotami těchto hodnot.

V grafu 2 je uvedena závislost $\omega = f\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$. Zobrazeny jsou jednak naměřené (a dle 6 přepočtené) hodnoty, dále křivky ideálních závislostí a rovněž křivky charakterizované lineární regresí (se směrnici postupně pro pružiny A–E: $1,74 \pm 0,01$, $5,14 \pm 0,09$, $2,53 \pm 0,03$, $3,77 \pm 0,02$, $2,54 \pm 0,04$ v $\sqrt{\text{Nm}^{-1}}$ – uvažována je zde jen statistická nejistota).

V grafu 3 je uvedena závislost $\omega = f\left(\sqrt{k}\right)$. Zobrazeny jsou jednak naměřené (a dle 6 přepočtené) hodnoty, dále křivky ideálních závislostí a rovněž křivky charakterizované lineární regresí (se směrnici postupně pro závaží 10–100 g: $9,2 \pm 0,1$, $6,77 \pm 0,03$, $5,62 \pm 0,02$, $4,44 \pm 0,03$, $3,130 \pm 0,005$ v $\sqrt{\text{kg}^{-1}}$ – uvažována je jen statistická nejistota).

pružina	$\frac{k}{\text{N m}^{-1}}$
A	$(3,23 \pm 0,04)$
B	$(29,9 \pm 0,4)$
C	$(7,29 \pm 0,07)$
D	$(15,5 \pm 0,2)$
E	$(7,34 \pm 0,07)$

Tabulka 4: Tuhost pružin změřená dynamickou metodou



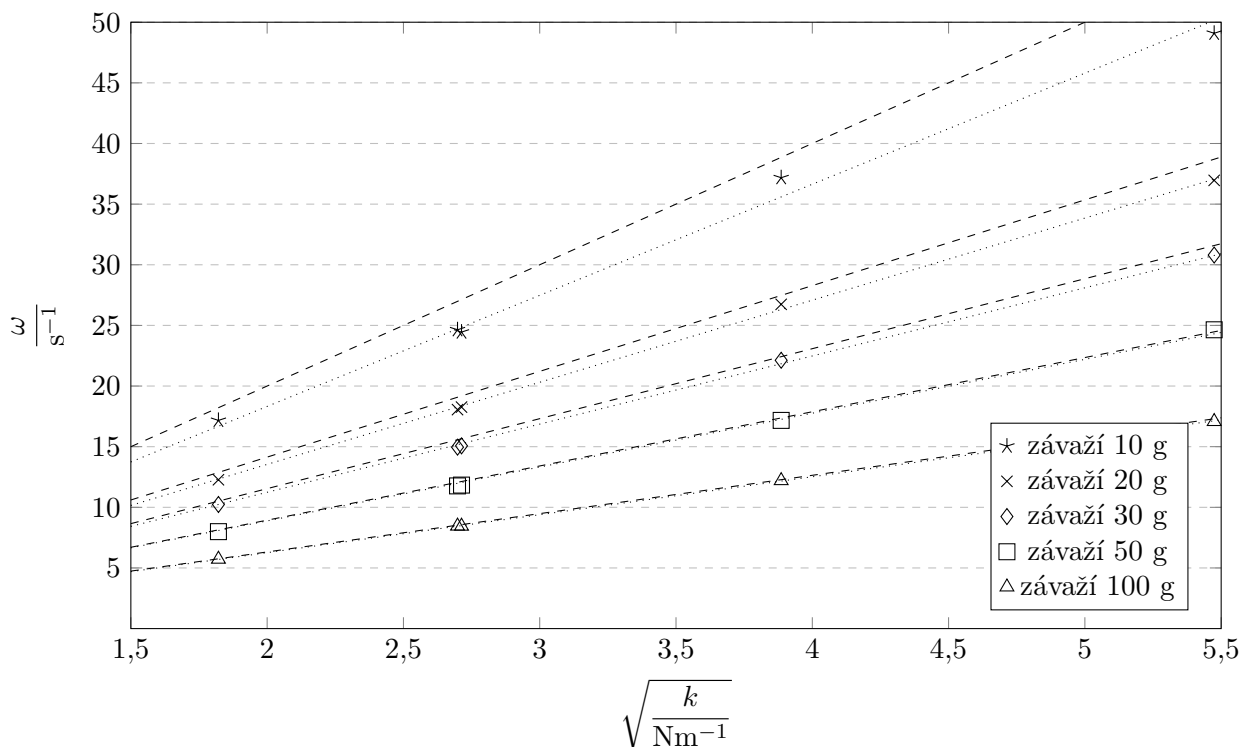
Graf 2: Závislost $\omega = f\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$. Body jsou proloženy jednak přímkou získanou regresní analýzou (tečkovaná čára, směrnice uvedeny v textu) a jednak přímkou ideální závislosti (čárkovaná čára), tj. jejíž směrnice je z rovnice 5 rovna $\sqrt{k_i}$. Jednotlivé sady dat lze snadno rozlišit (přímky se k bodům zřetelně přimykají), přímky náležející různým sadám tak nejsou od sebe rozlišeny. Všechny přímky procházejí počátkem.

3.3 Určení tíhového zrychlení

Při výpočtu g jsme vyšli ze vztahu 7 a tíhové zrychlení spočetli ze všech dostupných dat z tabulky 2. Nejistota byla určena podle standardního vztahu přenosu nejistot jako:

$$\sigma^2 = \frac{16\pi^4}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\sigma_y}{T_i^2} \right)^2 + \left(\frac{y_{0i} \sigma_T}{T_i^3} \right)^2 \right), \quad (13)$$

všechny veličiny již byly popsány výše. Dále byla rovněž započtena (opět jako součet druhých mocnin) nejistota statistická vznikuvší při výpočtu tíhového zrychlení jakožto aritmetického



Graf 3: Závislost $\omega = f(\sqrt{k})$. Body jsou proloženy jednak přímkou získanou regresní analýzou (tečkovaná čára, směrnice uvedeny v textu) a jednak přímkou ideální závislosti (čárkovaná čára), tj. jejíž směrnice je z rovnice 5 rovna $m_i^{-\frac{1}{2}}$. Jednotlivé sady dat lze snadno rozlišit (přímky se k bodům zřetelně přimykají), přímky náležející různým sadám tak nejsou od sebe rozlišeny. Všechny přímky procházejí počátkem.

průměru výsledků z jednotlivých měření. Celkově tak dostáváme:

$$g = (9,33 \pm 0,62) \text{ ms}^{-2}.$$

4 Diskuse výsledků

Nejprve k samotnému určování tuhosti pružin. Výsledky získané statickou a dynamickou metodou se v rámci spočtené nejistoty měření vzájemně shodují. Potíž je ovšem právě s určováním nejistoty: v případě statické metody drtivou většinu spočtené nejistoty nese nepřesnost katetometru, která byla v studijním textu odhadnuta na 1 mm, v čehož důsledku např. u pružiny B činí nejistota přibližně 12 % — oproti tomu velmi podobný výsledek určený dynamickou metodou je zatížen chybou přibližně 10krát menší. Takto spočtená nejistota tak není zcela v souladu se skutečností, neboť chyba regresní analýzy byla v případě dynamické metody čtyřikrát až desetkrát vyšší, nežli u metody statické. Odtud přímo plyne, že se jednotlivé hodnoty od ideální lineární závislosti v případě dynamické metody více odlišovaly, a je proto možné soudit, že byly i měřeny s nižší přesností.

Z grafu 1 je možno usoudit, že oblasti zatížení pružin byly zvoleny lineárně, snad s jedinou výjimkou, a tou je v případě pružin B, D, E volba 10g závaží, při kterémžto zatížení se vypočtená tuhost začala více odchylovat od určené hodnoty (nejvýše o 10 %).

Určená nejpravděpodobnější hodnota tíhového zrychlení se značně liší od požadované hodnoty $\sim 9,81 \text{ ms}^{-2}$, ovšem v rámci nejistoty měření je tato hodnota dosažitelná. Stejně jako v případě ostatních výsledků zde největším nositelem nejistoty bylo měření periody kmitů i prodloužení pružiny zatížené závažími 10 a 20 g, což může souviset s volbou linearitu oblasti zatížení.

Stejný efekt lze pozorovat i v grafu 3, kde je největší odchylka mezi ideální závislostí a závislostí získanou analýzou změřených hodnot právě u nejlhčích použitých závaží.

5 Závěr

Změřené tuhosti pružin A–E statickou metodou jsou:

$$\begin{aligned} \text{pružina A} & - (3,32 \pm 0,07) \text{ N m}^{-1}, \\ \text{pružina B} & - (30,0 \pm 3,8) \text{ N m}^{-1}, \\ \text{pružina C} & - (7,28 \pm 0,25) \text{ N m}^{-1}, \\ \text{pružina D} & - (15,1 \pm 1,2) \text{ N m}^{-1}, \\ \text{pružina E} & - (7,36 \pm 0,29) \text{ N m}^{-1}. \end{aligned}$$

Změřené tuhosti pružin A–E dynamickou metodou jsou:

$$\begin{aligned} \text{pružina A} & - (3,23 \pm 0,04) \text{ N m}^{-1}, \\ \text{pružina B} & - (29,9 \pm 0,4) \text{ N m}^{-1}, \\ \text{pružina C} & - (7,29 \pm 0,07) \text{ N m}^{-1}, \\ \text{pružina D} & - (15,5 \pm 0,2) \text{ N m}^{-1}, \\ \text{pružina E} & - (7,34 \pm 0,07) \text{ N m}^{-1}. \end{aligned}$$

Hodnota tíhového zrychlení byla určena jako:

$$g = (9,33 \pm 0,62) \text{ ms}^{-2}.$$

Literatura

- [1] *Studijní text k základnímu fyzikálnímu praktiku I, úloha II* [online]. KVOF MFF UK [cit. 2018-03-03]. Dostupné z: http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_102.pdf
- [2] ENGLICH, Jiří. *Úvod do praktické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2006, s. 110-113. ISBN 80-86732-93-2.